



**VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ**

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

**FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ**

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

**ÚSTAV AUTOMOBILNÍHO A DOPRAVNÍHO INŽENÝRSTVÍ**

INSTITUTE OF AUTOMOTIVE ENGINEERING

**VIBRACE ROVINNÝCH DESEK**

FLAT PLATES VIBRATIONS

**DIPLOMOVÁ PRÁCE**

MASTER'S THESIS

**AUTOR PRÁCE**

AUTHOR

**Bc. Roman Zajac**

**VEDOUCÍ PRÁCE**

SUPERVISOR

**Ing. Aleš Prokop, Ph.D.**

**BRNO 2017**

## Zadání diplomové práce

Ústav: Ústav automobilního a dopravního inženýrství  
Student: **Bc. Roman Zajac**  
Studijní program: Strojní inženýrství  
Studijní obor: Automobilní a dopravní inženýrství  
Vedoucí práce: **Ing. Aleš Prokop**  
Akademický rok: 2016/17

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č. 111/1998 o vysokých školách a se Studijním a kšeušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

### Vibrace rovinných desek

#### Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Práce zabývající se komplexním vyšetřením modálních charakteristik tenkých rovinných desek, s použitím různých přístupů k řešení. Hlavní náplní bude analytický a numerický výpočet vlastních tvarů kmitů několika předem definovaných variant rovinných desek, výsledky výpočtu budou následně porovnávány s výsledky vhodně konfigurovaného a provedeného experimentu.

#### Cíle diplomové práce:

Rešerše zahrnující současný stav problematiky kmitání desek.  
Analytický výpočet modálních vlastností.  
Návrh a provedení vhodného experimentu pro stanovení modálních vlastností.  
Numerický výpočet modálních vlastností.  
Porovnání výsledků pro několik variant desek a zároveň způsobů řešení.

#### Seznam literatury:

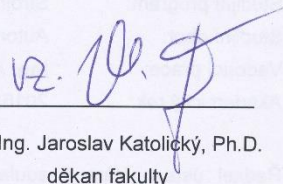
LEISSA, Arthur W. Vibration of plates. Washington: Scientific and Technical Information Division, National Aeronautics and Space Administration, 1993, 353 p.  
BLEVINS, Robert D. Formulas for natural frequency and mode shape. New York: Van Nostrand Reinhold Co, 1979, 492 p. ISBN 0442207107.

Termín odevzdání diplomové práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2016/17.

V Brně, dne 28. 9. 2016



prof. Ing. Václav Píštěk, DrSc.  
ředitel ústavu



doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.  
děkan fakulty

## ABSTRAKT

Táto diplomová práca je zameraná na problematiku vibrácií rovinných dosiek. Obsahuje výpočtové a experimentálne prístupy využívané pri stanovení vlastných tvarov a vlastných frekvencií rovinných dosiek. V tomto dokumente sú vzájomne porovnávané analytické, numerické a experimentálne výsledky modálnej analýzy výhradne voľného uloženia obdĺžnikovej rovinatej dosky. V práci je taktiež zahrnuté vynútené kmitanie s harmonickým budením, ako nadväznosť na získané výsledky z modálnej analýzy.

## KLÚČOVÉ SLOVÁ

Vibrácie, rovinné dosky, vlastné tvary, vlastné frekvencie, uloženie dosky, harmonická analýza

## ABSTRACT

The diploma thesis is focused on vibration of the planar plates. It includes the computational and experimental approaches used to determine the mode shapes and frequencies (eigenvalues) of planar plates. This paper compares the analytical, numerical and experimental results of the modal analysis specifically the free-standing rectangular planar plate. The work also encompasses forced oscillation with harmonious excitement as a continuation of the obtained results from modal analysis.

## KEYWORDS

Vibration, planar plates, mode shapes, mode frequencies, laying of the plate, harmonic analysis

## BIBLIOGRAFICKÁ CITÁCIA

ZAJAC, R. *Vibrace rovinných desek*. Brno, 2017. Diplomová práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav automobilního a dopravního inženýrství. 74 s. Vedúci diplomovej práce Aleš Prokop.

## ČESTNÉ PREHLÁSENIE

Prehlasujem, že táto práca je mojím pôvodným dielom, spracoval som ho samostatne pod vedením Ing. Aleša Prokopa Ph.D. a s použitím literatúry uvedenej v zozname.

V Brne dňa 25. mája 2017

.....

Roman Zajac

## **POĎAKOVANIE**

Chcel by som poďakovať vedúcemu diplomovej práce Ing. Alešovi Prokopovi Ph.D. za mnoho prospešných rád a správnych dotazov počas vytvárania tejto práce a Ing. Jozefovi Zlámalovi za pomoc pri experimentálnych meraniach.

## OBSAH

Úvod .....	9
1 Teoretické poznatky kmitania rovinných dosiek .....	10
1.1 Základné rovnice kmitania .....	10
1.2 Hlavné rozdelenie rovinných dosiek .....	11
1.3 Ďalšie efekty ovplyvňujúce kmitanie rovinných dosiek .....	18
2 Teória modálnej analýzy .....	26
2.1 Analytický prístup .....	26
2.2 Numerický prístup za pomoci mkp .....	27
2.3 Experimentálny prístup .....	28
3 Výpočtový prístup stanovenia vlastných módov obdĺžnikovej dosky .....	35
3.1 Analytický výpočet vlastných frekvencií obdĺžnikovej dosky .....	35
3.2 Numerický výpočet vlastných módov obdĺžnikovej dosky .....	38
4 Experimentálna modálna analýza obdĺžnikovej dosky .....	42
4.1 Modálna analýza s použitím rázového kladivka .....	42
4.2 Modálna analýza s použitím budiča vibrácií .....	44
4.3 Vyhodnocovanie modálnych vlastností .....	46
5 Harmonická analýza obdĺžnikovej dosky .....	58
5.1 Experimentálna harmonická analýza .....	58
5.2 Numerický výpočet harmonickej analýzy .....	63
5.3 Výsledky harmonickej analýzy .....	64
Záver .....	68
Zoznam použitých skratiek a symbolov .....	72



## ÚVOD

V oblasti strojárstva, resp. všeobecne v technike, ale aj v bežnej praxi, sú neoddeliteľnou súčasťou každého reálneho telesa vibrácie. Hovoríme o predmetoch, súčiastiach s určitou hmotnosťou, tuhosťou, hustotou. Súčasná doba doposiaľ priniesla a stále prináša aj vďaka vývoju nových počítačových a softwarových vybavení mnohé možnosti výpočtových simulácií danej problematiky. Vďaka tomu sa v posledných rokoch na popredné miesta pri riešení diagnostiky vibrácií dostala modálna analýza. Na hodnote naberala samozrejme z rastúcim počítačovým vybavením a napredovaním programov MKP, teda programov založených na metóde konečných prvkov.

Modálna analýza sa zaoberá stanovením tzv. vlastných módov súčastí, pričom každý mód je charakteristický svojim vlastným tvarom a prislúchajúcou frekvenciou. Prostredníctvom experimentálneho stanovovania modálnych vlastností sa navyše vyšetrujú hodnoty tlmenia. V praxi sa potom na základe modálnej analýzy modelujú, navrhujú jednotlivé systémy tak, aby v prevádzkovom zaťažení nedochádzalo ku nežiaducim rezonanciám, a to zakomponovaním rôznych tlmiacich prvkov do daného systému, zvolením iného vhodného materiálu alebo je v niektorých situáciách nutné dokonca zmeniť celý konštrukčný koncept uvažovanej súčasti.

Konečnému stanoveniu modálnych vlastností reálneho telesa predchádza niekoľko postupných riešení. Prvotnou metodikou je analyzovanie geometrie meranej štruktúry a najmä jej funkcia v reálnych podmienkach. Je nepochybne nutné poznať uloženie telesa a mať predstavu o tom, akú bude mať táto súčasť funkčnú závislosť. Teda týmto môžu byť myslené rôzne stykové kontakty z ďalšími telesami, odlišné možnosti spôsobu uchytenia a pod. Svoje zastúpenie v oblasti modálnej analýzy nachádzajú uplatnenie aj analytické výpočtové prístupy. Takto zvoleným prístupom sú stanovené hodnoty vlastných frekvencií zväčša geometricky jednoduchých súčastí. Analytický prístup môže byť použitý ako prvotný odhad, vďaka ktorému je možné v začiatkoch predikovať korektné nastavenie buďto počítačových simulácií alebo samotných laboratórnych meraní. Taktiež je nutné vziať do úvahy aj ekonomickosť a hospodárnosť z pohľadu realizácie experimentu, kedy v ojedinelých prípadoch môže byť experimentálna modálna analýza ťažko uskutočniteľná. Výsledným záverom bývajú potom výsledky namerané v experimente a výsledky z výpočtovej simulácie vzájomne porovnané a v prípade odchýlok navrhované správne korekcie.

Problematika danej diplomovej práce sa zaoberá vibráciami rovinných dosiek. Zahŕňa v sebe teoretické, výpočtové a experimentálne poznatky v konkrétnom probléme. Hlavnú časť tvorí modálna a harmonická analýza ako z hľadiska výpočtových simulácií, tak aj z pohľadu vhodne nakonfigurovaných experimentálnych meraní.

Cieľom práce je záverečné porovnanie jednotlivých výsledkov a zváženie vhodnosti použitých výpočtových postupov, prípadné zhodnotenie vzniknutých odchýlok v záverečnom zhrnutí.

# 1 TEORETICKÉ POZNATKY KMITANIA ROVINNÝCH DOSIEK

Problematika kmitania rovinných dosiek je špecifická oblasť v určovaní vlastných tvarov a frekvencií. Akousi hlavnou a zrejme prvou ucelenou literárnou publikáciou sa stala kniha „*Vibration of plates*“ od Arthura W. Leissu. Na jej základoch sa opiera mnoho ostatných publikácií zaoberajúcich sa kmitaním rovinných dosiek.

Na začiatok je dobré si uvedomiť niekoľko základných vlastností, predpokladov či faktov, ktoré sú charakteristické pre rovinné dosky podľa [5]:

- Rovinné dosky sú charakteristické svojimi rozmermi (dĺžkou, šírkou, rádiusom, hrúbkou,...) v závislosti od geometrie
- Na rozdiel od membrán, majú určitú tuhosť v ohybe, ako výsledok parametrov hrúbky a pružnosti materiálu
- Počas vybudenej vibrácie sú deformované primárne kolmo k ich rovine
- Sú ploché a majú konštantnú hrúbku
- Pozostávajú z homogénnych, lineárne-elastických, izotropných materiálov
- Sú tenké, je uvažovaný predpoklad 1/10 hrúbky dosky vzhľadom na hlavný rozmer (dĺžka, priemer)
- Sú deformované najmä ohybom, deformácie sú malé v porovnaní s hrúbkou dosiek
- Normály strednej roviny nedeformovanej dosky zostávajú priame a kolmé k rovine počas deformácie
- Vplyv zotrvačnosti a šmykových deformácií je zanedbaný
- Rovinné zaťaženie dosky je nulové

Dôležité je si uvedomiť, že v praxi mnoho z vyššie spomenutých charakteristík neplatí, resp. ich aplikovanie je technicky nevhodné. V nasledujúcich podkapitolách je uvedených niekoľko odlišných prístupov (prípadoch), ktoré sa vychylujú spomenutým základným štandardom.

## 1.1 ZÁKLADNÉ ROVNICE KMITANIA

Štandardná pohybová rovnica popisujúca kmitavý pohyb rovinných dosiek má diferenciálny charakter, podľa [1] má tvar:

$$D \cdot \Delta^4 \cdot w + \rho_p \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad , \quad (1)$$

kde  $t$  [s] je čas,

$w$  [m] je priečna výchylka,

$\rho_p$  [kg.m<sup>-3</sup>.m<sup>-2</sup>] je hustota na jednotku plochy danej rovinnej dosky,

$\Delta^2$  [ - ] je Laplaceov operátor.

Parameter  $D$  je tzv. ohybová tuhosť a je definovaná rovnicou podľa [1]:

$$D = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} , \quad (2)$$

kde  $E$  [Pa] je Youngov modul pružnosti v ťahu,

$h$  [m] je hrúbka uvažovanej rovinnej dosky,

$\nu$  [-] je Poissonova konštanta.

Za predpokladu, že sa jedná o prípad voľnej vibrácie, pohybová rovnica má tvar podľa [1]:

$$w = W \cdot \cos \omega \cdot t \text{ [m]} , \quad (3)$$

kde  $\omega$  [rad.s<sup>-1</sup>] je uhlová frekvencia,

$W$  [-] je funkcia polohy súradníc.

V prípade, že sa jedná o prípad upnutej dosky voči nejakej inej súčasti, tak je uvažovaný tvar diferenciálnej rovnice na základe [1]:

$$D \cdot \Delta^4 \cdot w + K \cdot w + \rho \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 , \quad (4)$$

kde  $K$  [N.m<sup>-1</sup>] je tuhosť dosky.

## 1.2 HLAVNÉ ROZDELENIE ROVINNÝCH DOSIEK

Je zrejmé, že aplikovanie správneho výpočtového postupu na riešený objekt je základom správnej konečnej funkčnosti produktu. Inak tomu nie je ani v oblasti vibrácií rovinných dosiek. Pojem rovinnej dosky je značne zovšeobecnený a zjednodušený. V bežnej praxi sa však dostávame do kontaktu s mnohými originálnymi a mnohotvarými predmetmi, strojnými súčasťami, novinkami. Jedná sa napríklad o rôzne obloženia, bezpečnostné uzávery, veká prevodoviek, steny strojných súčastí, atď.

Preto je nutné brať do úvahy pri riešení a následnom aplikovaní optimálneho výpočtového modelu niekoľko podstatných kritérií. Obzvlášť sa zohľadňuje geometria, čiže tvar skúmanej súčasti, materiál (izotropný, anizotropný), premenlivá hrúbka dosky, pôsobiace zaťaženie (sily, momenty) a takzvané okrajové podmienky. Každá zo spomenutých hľadísk zastáva pri výpočtoch svoju dôležitosť.

Pri stanovení korektných výpočtových postupov je potrebné si uvedomiť, akú má skúmaná strojná súčasť funkciu a najmä akým spôsobom je pohybovo obmedzená. Keďže jednotlivé výsledky sú závislé na špecifických okrajových podmienkach, je vhodné kvôli prehľadnosti v nasledujúcich odsekoch uviesť ich základné značenie podľa [1]:

**F** – z anglického slova „free“ – voľný

**C** – z angl. slova „clamped“ – upnutý/votknutý

**SS** – z angl. slova „simply supported“ – jednoducho podopretý

### 1.2.1 ROVINNÉ DOSKY Z POHLADU GEOMETRIE

Na základe finálnych tvarových rozmerov vyrobenej súčasti, ktorá má charakter rovinnej dosky, je uvažovaná pri vyjadrení vlastných módov (frekvencií a tvarov) ich geometria. Tá má z hľadiska analytického výpočtu samozrejme významný efekt. Hlavne čo sa týka jednotlivých okrajových podmienok, ktoré sa môžu vyskytovať v rámci jednej súčasti. Práve kvôli množstvu viacerých kombinácií tzv. okrajových podmienok, ktoré môžu nastať, je značne zložitá aplikovať najideálnejší výpočtový vzťah.

Najčastejšie sa vyskytujúce tvary rovinných dosiek podľa [1] sú:

- Kruhovú dosku
- Dosky v tvare elipsy
- Obdĺžnikové dosky
- Dosky v tvare rovnobežníku
- Rôzne štvoruholníkové tvary dosiek
- Trojuholníkové dosky
- Mnohouholníkové tvary dosiek (päťuholníky, a pod.)

#### OBĎĽŽNIKOVÉ ROVINNÉ DOSKY

Jedna z najčastejšie sa vyskytujúcich geometrií v konštrukčných prevedeniach. Charakteristickými parametrami obdĺžnikových dosiek sú: dĺžka, šírka a hrúbka dosky. V oblasti analytického stanovenia vlastných frekvencií a tvarov existuje dvadsať jedna možných kombinácií elementárnych okrajových podmienok, t. j. SS, C, F [1].

Vzhľadom na súčasný stav poznania je možné s uvažovaním rôznych možných kombinácií uvádzať podľa [1] niekoľko charakteristických uložení:

##### A. SS-SS-SS-SS

Jedná sa o jeden z najelementárnejších príkladov uloženia obdĺžnikovej dosky. Je to stav, kedy sú všetky štyri hrany na okrajoch dosky pohybovo obmedzené prostredníctvom väzby SS. Pri stanovení vlastných frekvencií je možné v tomto prípade vychádzať z nasledujúcej rovnice podľa [1]:

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{\rho}} \left[ \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] [\text{rad.s}^{-1}], \quad (5)$$

kde  $a$  [m] je dĺžka dosky,

$b$  [m] je šírka dosky,

$\rho$  [kg.m<sup>-3</sup>] je hustota materiálu dosky

$m, n$  [ - ] sú čísla uzlových čiar.

### B. F-F-F-F a C-C-C-C

Podobne ako pri zaväzbení 4xSS sú väzbami 4xF a 4xC realizované základné uloženia obdĺžnikových dosiek. Je zrejmé, že na všetkých 4 hranách dosky sú uplatňované rovnaké okrajové podmienky. Pri stanovovaní konkrétnych hodnôt vlastných frekvencií pri voľnom a votknutom ukotvení dosky je možné postupovať na základe rovnice podľa [5]:

$$f_{ij} = \frac{\lambda_{ij}}{2\pi a^2} \sqrt{\left[ \frac{Eh^3}{12\gamma(1-\nu)} \right]} \text{ [Hz]}, \quad (6)$$

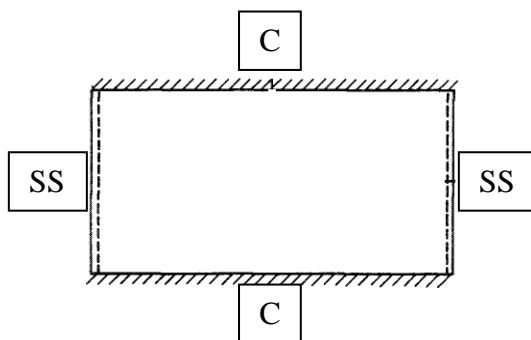
kde  $\lambda_{ij}$  [ - ] je bezrozmerná experimentálne určená frekvenčná konštanta,

$\gamma$  [kg.m<sup>-2</sup>] je hmotnosť na jednotku plochy dosky pre materiál s hustotou  $\rho$  nadobúda hodnotu podľa vzťahu na základe [5]:

$$\gamma = \rho \cdot h \text{ [kg.m}^{-2}\text{]}. \quad (7)$$

### C. Protíľahlé uloženie SS

Stav uloženia, kedy sú dve z protíľahlých hrán dosky uložené na „jednoduchých podporách“. Za tohto predpokladu môže nastať 6 kombinácií v uvážení len väzieb C, F a SS. Ako jeden z možných uložení je napríklad dosky votknutá na dvoch zostávajúcich hranách (viď Obr. 1) [1].



Obr. 1 SS – C – SS – C doska [1]

### D. Elastické, nespojité a bodové uloženie dosiek

Zväčša elastické ukotvenie rovinných útvarov býva realizované na pružinovom základe. Teda samotná doska je ukotvená na pružinách. V následnom vyhodnocovaní vlastnej frekvencie v takomto prípade je potrebné zohľadniť tuhosť pružín, a vzájomnú vzdialenosť medzi pružinami. Do výpočtu vlastnej frekvencie dosky podľa [5] vstupuje tzv. modul pružinového podkladu:

$$E_f = k_f/x_p^2 \text{ [Pa.m}^{-1}\text{]},$$

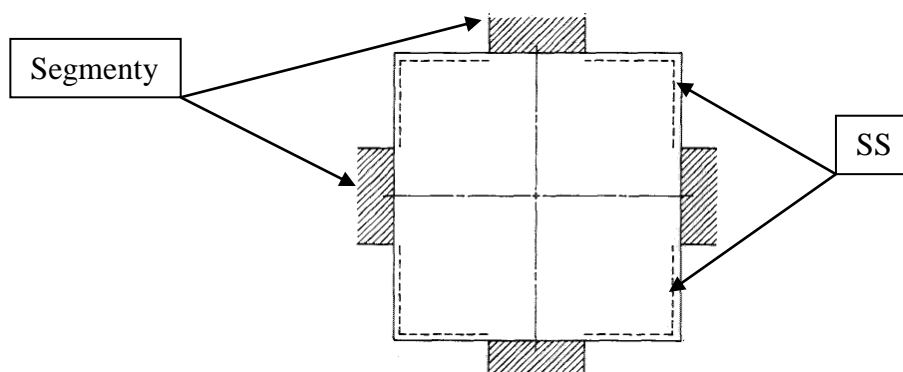
kde  $k_f$  [N.m<sup>-1</sup>] je tuhosť pružiny, (8)

$x_p$  [m] je vzdialenosť medzi pružinami.

Pri vyčíslení vlastnej frekvencie rovinatej dosky ułożenej na pružinách musíme k základnej frekvencii pričítať ešte nasledovný člen podľa [5]:

$$\left(\frac{E_f}{4\pi^2\gamma}\right)^{1/2}. \quad (9)$$

Rovinné dosky ułożené na elastických (pružných) podkladoch len potvrdzujú, že v praxi je množstvo spôsobov uchytenia súčastí. Ďalší špecifický prípad uchytenia je nespojité uloženie. Nespojitým prípadom je myslené také uloženie, kde je hrana dosky napríklad čiastočne votknutá a na určitém úseku má väzbu SS. Na Obr. 2 je štvorcová rovinná doska symetricky votknutá medzi 4 segmenty a na zostávajúcich častiach je „jednoducho podopretá“. Je potrebné dodať, že na vyčíslenie vlastných frekvencií pre nespojito ułożené dosky treba brať do úvahy umiestnenie jednotlivých väzieb. To znamená, že experimentálne stanovené výpočtové konštanty majú pre každý iný prípad rozdielne hodnoty. Ďalším atypickým uchytením sú tzv. „bodové podpory“. Prakticky to vlastne znamená, že daná doska už nie je ukotvená na hranách ale v konkrétnych bodoch dosky [1].



Obr. 2 Štvorcová rovinná doska symetricky obmedzená 4 segmentami [1]

### E. Diery, vnútorné výrezy

Pri rovinných doskách, v ktorých sú buďto vyvrtané otvory alebo výrezy sú pri analytickom stanovení vlastnej frekvencie značne okresané výpočtové postupy. Prostredníctvom experimentálnych meraní je známych len niekoľko frekvenčných konštánt. Napríklad je uvedený vzťah na základe [1]:

$$\omega a^2 \sqrt{\rho/D} = 2,8963, \quad (10)$$

podľa ktorého je možné vyčísliť vlastnú frekvenciu štvorcovej dosky s centrálnou vyvrtanou dierou, pričom musí byť zachovaný pomer  $R_0/a = 0,5$ , čiže polomer diery ku dĺžke hrany dosky. Rovnica (10) taktiež zahŕňa predpoklad voľne uloženej dosky na všetkých 4 hranách [1].

### 1.2.2 ROVINNÉ DOSKY S ANIZOTROPNÝMI VLASTNOSTAMI

Na začiatok je vhodné si pripomenúť, že izotropné rovinné dosky pozostávajú z materiálu, ktorého vlastnosti sú nezávislé na smere. Znamená to teda, že Youngov modul pružnosti  $E$  a Poissonova konštanta  $\nu$ , sú v každom bode objemu danej súčasti totožné. V tematike vibrácií tenkých dosiek sú z pohľadu anizotropie najčastejšie sa vyskytujúcimi rovinné dosky s ortotropnými vlastnosťami. Ich základnou charakteristikou v porovnaní s izotropnými je taká, že materiálové vlastnosti sú jedinečné a nezávislé v smere troch vzájomne kolmých súradnicových osí. Typickým príkladom je drevo a rôzne kompozitové štruktúry [5].

V analýze ortotropných rovinných dosiek sú podľa [5] definované 4 tzv. ortotropné konštanty:

$$D_x = \frac{E_x \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \nu_x \nu_y)} , \quad (11)$$

$$D_y = \frac{E_y \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \nu_x \nu_y)} , \quad (12)$$

$$D_k = \frac{G \cdot h^3}{12} , \quad (13)$$

$$D_{xy} = D_x \cdot \nu_y + 2 \cdot D_k , \quad (14)$$

kde  $D_x, D_y, D_k, D_{xy}$  sú zložky ohybovej tuhosti v príslušnom súradnicovom smere,

$D_k$  je člen ohybovej tuhosti,

$E_x, E_y$  [Pa] sú Youngove moduly pružnosti v smere danej súradnicovej osi,

$\nu_x, \nu_y$  [ - ] sú Poissonove konštanty v smere danej súradnicovej osi.

Pri pohľade na vyššie uvedené konštanty je zrejmé, že v prípade zaoberania sa analytickým výpočtom frekvencií ortotropných rovinných útvarov je nutné zohľadňovať viacero veličín. Korektné analytické vyjadrenie vlastných módov anizotropných štruktúr do vysokej miery závisí najmä od ich materiálovej znalosti. Konkrétne sa jedná o hodnoty Youngovho modulu pružnosti ( $E, G$ ) a Poissonovu konštantu a to pre každý uvažovaný súradnicový smer.

### 1.2.3 ROVINNÉ DOSKY S PLOŠNE PÔSOBIACIMI SILAMI

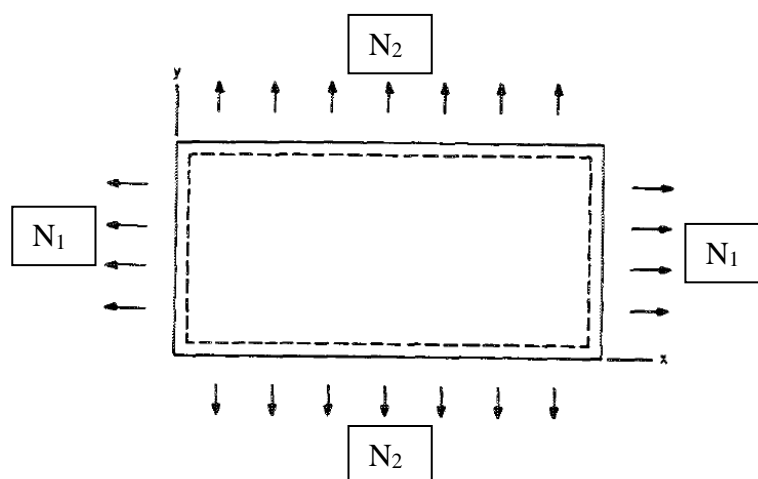
Ďalším diskutovaným prípadom v oblasti vibrácií dosiek je zohľadnenie rovinného zaťažovania. Teda v rovine dosky sa nachádzajú rovnomerne pôsobiace sily  $N_1$  a  $N_2$

(viď Obr. 3) vzhľadom na uvažované dĺžkové rozmery. Pre uvedené rovinné zložky síl platia nasledovné predpoklady podľa [1]:

- Je uvažovaný predpoklad tzv. voľnej (F), nenútenej vibrácie
- V pohybových rovniciach platia lineárne úvahy

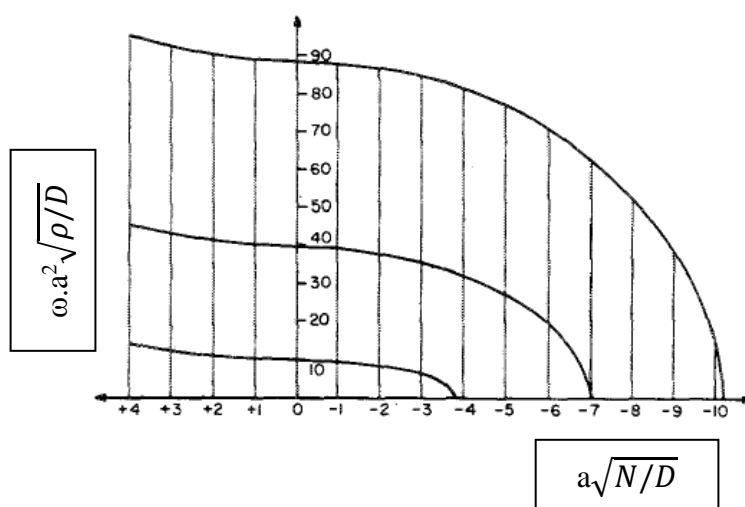
Samotná intenzita (veľkosť) pôsobiaceho silového zaťaženia je závislá od priestorových rozmerov. Nie je ovplyvňovaná časom ani zmenou priečnej výchylky. Z platiacim faktom, že sily nie sú závislé od priečnej výchylky, je možné realizovať postup podľa týchto úvah: okrajové podmienky neposkytujú stálosť v rovine dosky, vzniknutá výchylka je dostatočne malá vzhľadom k pôsobiacemu ťahu/tlaku v doske a rovinné sily nie sú tak výrazne ovplyvňované [1].

V podstate pri rovinnom zaťažovaní na ploche dosky najčastejšie dochádza k ťahu ( $N_1 > 0$ ,  $N_2 > 0$ ) a k tlaku ( $N_1 < 0$ ,  $N_2 < 0$ ). Pri pôsobiacom ťahovom zaťažovaní sa vlastná frekvencia dosky zvyšuje, tak naopak tlakom dochádza k jej miernemu poklesu, ako je možné vidieť na Obr. 4 [5].



Obr. 3 Obdĺžniková doska s okrajovými podmienkami SS s rovnomerne pôsobiacim silovým zaťažením [1]





Obr. 4 Závislosť parametrov vlastnej frekvencie vzhľadom k pôsobiacej silovej zložke pre prípad votknutej kruhovej dosky [1]

#### 1.2.4 ROVINNÉ DOSKY S PREMENLIVOU HRÚBKOU

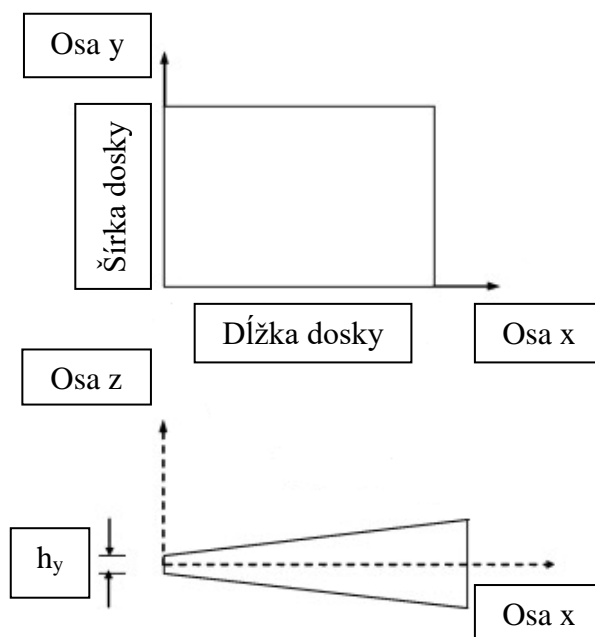
V niektorých osobitných situáciách môže nastať, že pri tvorbe výpočtového modelu je potrebné brať do úvahy premenlivú hrúbku rovinnej dosky. To znamená, že v zostavovaní výpočtových postupov (analytických alebo numerických) je nutné upustiť zo základného predpokladu, a teda, že hrúbka dosky  $h$  je nie je v celom priereze konštantná.

Keďže variabilná hrúbka je funkciou rozmerov (polomer, dĺžka dosky) skúmanej rovinnej súčasti, je zrejmé, že aj ohybová tuhosť  $D$  nadobúda rôzne hodnoty. Rovnica popisujúca zúženie obdĺžnikovej rovinnej dosky má tvar podľa [1]:

$$h = h_y \cdot \left(1 + \alpha_z \frac{x}{a}\right) [\text{m}], \quad (15)$$

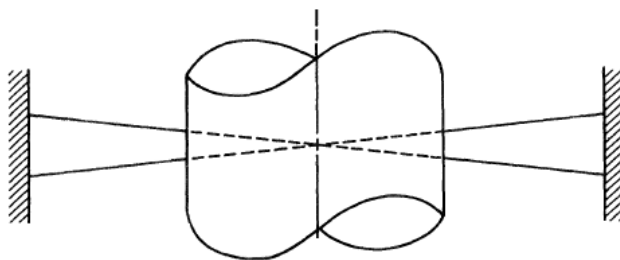
kde  $h_y$  [m] je hrúbka dosky pozdĺž osi  $y$  (viď Obr. 5),

$\alpha_z$  [°] je uhol zúženia dosky.



Obr. 5 Obdĺžniková rovinná doska s premenlivou hrúbkou [11]

Z pohľadu analytického určenia vlastných frekvencií dosiek s premenlivou hrúbkou sú výpočtové postupy do určitej miery okresané. Najmä na základe poznatkov z [1] a [5] je možné vyhodnotiť vlastné frekvencie pre pár konkrétnych špecifických prípadov uchytenia rovinných dosiek. Jedným z nich je na Obr. 6 uvedená votknutá prstencová doska s lineárne sa meniacou hrúbkou.



Obr. 6 Votknutá prstencová doska s variabilnou hrúbkou [1]

### 1.3 ĎALŠIE EFEKTY OVPLYVŇUJÚCE KMITANIE ROVINNÝCH DOSIEK

Odhládnuv od primárnych vlastností, ako sú geometria, materiálové charakteristiky, spôsob uchytenia rovinných dosiek je treba vziať do úvahy aj iné nemenej dôležité vplyvy. Táto sekundárna oblasť, ktorá ovplyvňuje nezanedbateľnou mierou vlastné tvary a frekvencie rovinných dosiek je rozdelená podľa [1] na štyri oblasti:

### A. Okolité médium

V jednoduchom pohľade na vec je zrejmé, že výpočet vlastných módov bude určitou mierou závisieť na tom, v akom prostredí daná rovinná plocha bude pracovať. Teda s akým okolitým prostredím, respektíve iným pracovným médiom prichádza do kontaktu behom svojej pracovnej prevádzky.

Majoritná časť experimentálnych výsledkov a meraní rôznych typov rovinných dosiek bola doposiaľ vykonávaná na vzduchu. Z tohto dôvodu nie je k dispozícii dostatočné množstvo výpočtových rovníc a modelových postupov. Na základe čoho je v podstate nemožné zahrnúť viacero rozličných variant okrajových podmienok a prístupov vo všetkých možných prípadoch.

Jedným z mála takýchto modelov je podľa [2] uvažovaný prípad **votknutej kruhovej dosky**, ktorá prichádza z jednej strany do kontaktu s vodou. Táto úvaha predpokladá nekonečnú rozlohu vody a jej nestlačiteľnosť.

Prostredníctvom Rayleighovej metódy je uvedená funkcia výchylky podľa [1]:

$$w = W \cdot [1 - (r/a)^2]^2 \quad [m]. \quad (16)$$

Výsledný vzorec, popisujúci základný frekvenčný parameter – prvý frekvenčný mód, má tvar podľa [2]:

$$\omega \cdot a_k^2 \sqrt{\rho/D} = \frac{10,33}{\sqrt{1 + 0,6689 \left(\frac{\rho_w}{\rho}\right) \left(\frac{a_k}{h_k}\right)}}, \quad (17)$$

kde  $a_k/h_k$  [ - ] je pomer rádiusu a hrúbky kruhovej dosky,

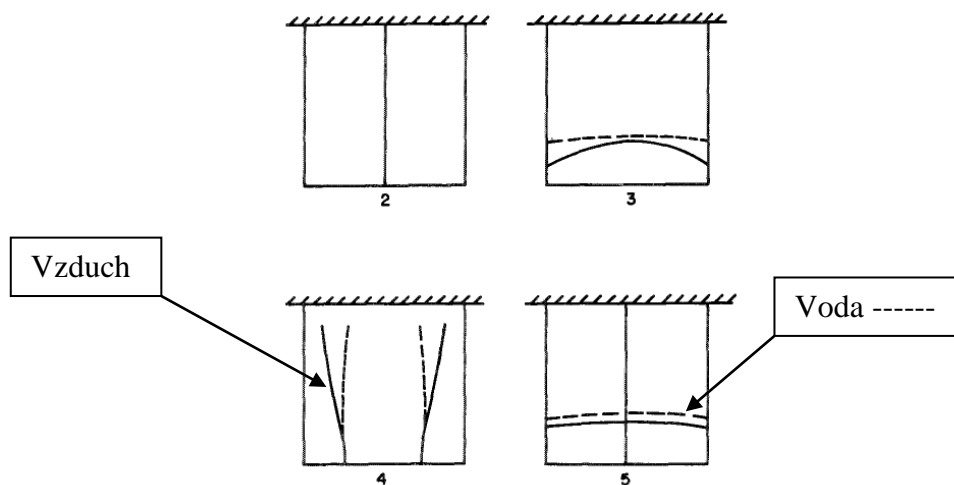
$\rho_w/\rho$  [ - ] je pomer hustoty vody ku hustote materiálu dosky.

V prípade uvažovania inej nestlačiteľnej tekutiny je možné aplikovať rovnicu (17). Výpočtový vzťah druhého módu je odlišný len v číselne zadaných parametroch [2].

V oblasti vplyvu média na kruhové rovinné dosky bolo doposiaľ stanovených viacero výpočtových vzťahov s uvažovaním rozličných špecifických podmienok pomocou [1]:

- prípad kruhovej dosky ponorenej v tekutine (kontakt z oboch strán),
- zahrnutie tlmenia vzhľadom k tekutine,
- z jednej strany jednoducho podopretá kruhová doska a z druhej strany zaťažená tekutinou,
- dokonale pripevnená doska v nehmotnom, elastickom, nekonečnom polpriestore.

Mimo záležitosti kontaktu kruhová doska – tekutina, bol doposiaľ obdobne skúmaný a študovaný efekt tekutiny a vzduchu na modely **obdĺžnikovej dosky**. Konkrétnejšie sa jedná o akýsi prípad obdĺžnikovej konzolovej dosky. To znamená z jednej strany bola rovinná doska pevne ukotvená a z ostatných 3 zostávajúcich strán boli stanovené okrajové podmienky F-F-F-F, teda uložené voľne. Ilustračný príklad znázorňujúci priebeh uzlových línií v materiály súčasti v prípade uvažovaného média voda a vzduch je na Obr. 7 [1].

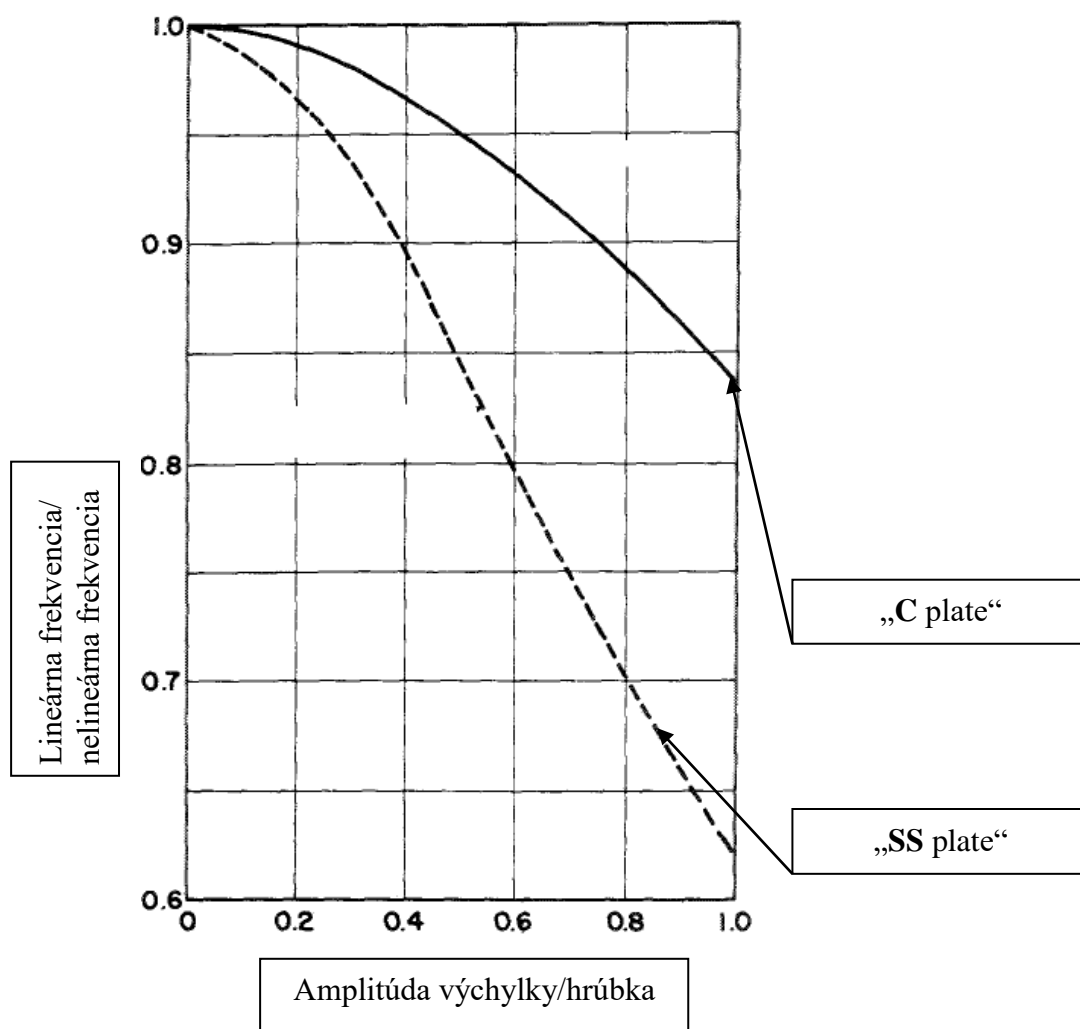


Obr. 7 Porovnanie lokácií uzlových čiar v konzolovej obdĺžnikovej doske [3]

## B. Veľké výchylky

Druhou, ďalšou diskutovanou časťou sú takzvané „veľké výchylky“. Slovný význam môže mnohokrát zavádzať čitateľa, riešiteľa otázky poruchy-defektu geometrie. V tomto prípade sa nejedná o veľké rozmerové nepresnosti samotnej vyrobenej rovinatej dosky (strojnej súčasti). Týmto termínom je myslený vplyv dostatočne veľkých priečných výchyliek na spôsobenie akéhosi ďalšieho spevnenia (vystuženia) rovinatej dosky. To majú za následok vygenerované tzv. membránové sily, ktoré sú priamym dôsledkom výchylky. Je za potreby zobrať do úvahy fakt, že rozsah, veľkosť výchylky je významnou mierou ovplyvňovaný presnými okrajovými podmienkami [1].

Pri získaní čo možno najpresnejších výsledkov aj v tomto prípade je nutné sa zaoberať niekoľkými úvahami. V prvom rade sú to okrajové podmienky – obmedzenie pohybu v danom smere. Iným vyskytujúcim sa problémom je nelinearita, resp. nelineárna frekvencia. Nelinearita určitou mierou ovplyvňuje výsledné hodnoty nielen vlastných frekvencií, ale aj v oblasti rozloženia napätia, atď. Na Obr. 8 sú vykreslené dve závislosti. Čiarkovaná krivka označuje prípad jednoducho podopretej kruhovej dosky („SS plate“) a plná čiara vykresľuje závislosť pre votknutú kruhovú dosku. Z grafu je možné vidieť, že závislosť vykresľujúca votknuté uchytenie nie je taká strmá ako je tomu v prípade SS uloženia. To znamená, že vplyv nelinearity je pri votknutej väzbe markantnejší.



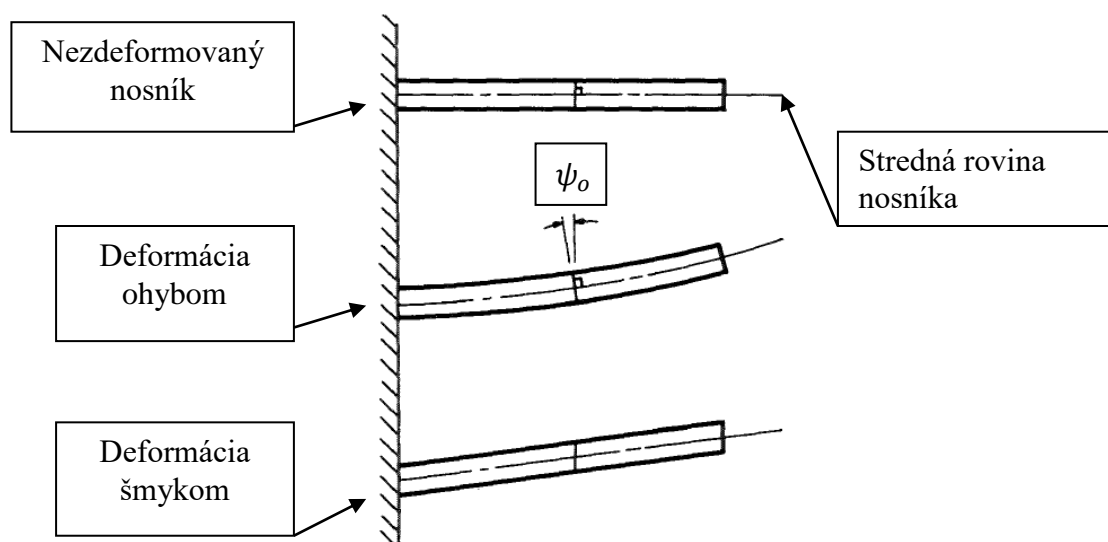
Obr. 8 Pomer lineárnej a nelineárnej frekvencie ku pomeru amplitúdy a hrúbky dosky [4]

### C. Šmykové deformácie a zotrvačnosť

Vývojom poznatkov v oblasti deformácii telies a v oblasti určovania parametrov zotrvačnosti telies (momenty zotrvačnosti, tenzory zotrvačnosti) bolo umožnené vniesť do problematiky vibrácii rovinných dosiek ďalšie nové úvahy.

Jedná sa konkrétne o účinok šmykových deformácií a takzvanej zotrvačnosti, ktorá je uvažovaná hlavne pre prípad rotácie rovinných dosiek. Pri jednoduchšej úvahe je možné dôjsť k určitej spojitosti medzi šmykovou deformáciou a zotrvačnosťou. Prostredníctvom pôsobenia šmykových síl je teleso deformované, geometricky pretvárané. Tento fakt má teda efekt, i keď minimálny, na pretvorenie geometrie. Touto nepatrnou zmenou je následne ovplyvnená aj zotrvačnosť buďto vychýlením osi rotácie alebo akýmsi mikroskopickým premiestnením materiálu v smere deformácie. Zahnutie zotrvačnosti, resp. šmykových deformácií vo výpočtových vzťahoch znižuje hodnoty počítaných frekvencií. To znamená aj prostredníctvom [6], že s narastajúcou mierou zotrvačnosti v samotnom výpočtovom vzťahu sú výsledné hodnoty frekvencií nižšie v porovnaní s neuvažovaním tohto problému [1].

Pre jednoduchú predstavu je na Obr. 9 uvedený prípad votknutého nosníku. Na konzole je ukázaný rozdiel medzi deformáciou v ohybe a v šmyku. Pri deformácii ohybom je vidieť vyznačený uhol  $\psi_0$ . V porovnaní s prípadom pred deformáciou je vidieť, že prierez v danom bode nosníka zostáva pri ohybe kolmý k jeho strednej rovine. Nakoľko pri šmykom deformovaní nosníka je za potreby si uvedomiť, že spodné aj vrchné vlákna konzoly sú deformované rovnako.



Obr. 9 Modálne tvary nosníku pri deformácii ohybom a šmykom [1]

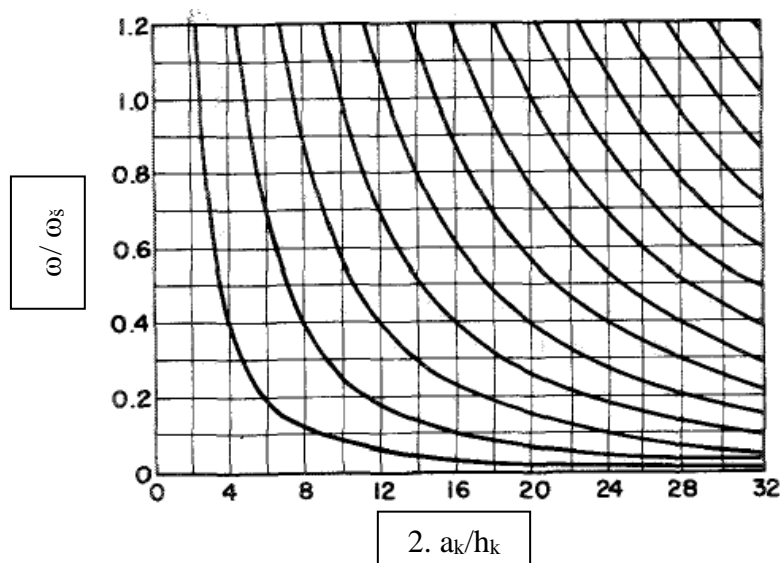
Za zjednodušeného predpokladu nekonečných plošných rozmerov rovinatej dosky je hodnota frekvencie prvého módu z anglického výrazu tzv. „thickness-shear vibration“ vyčíslená podľa [1]:

$$\omega_s = \pi \sqrt{\frac{G}{\rho \cdot h}} \quad [\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}], \quad (18)$$

kde  $\pi$  [ - ] je konštanta,

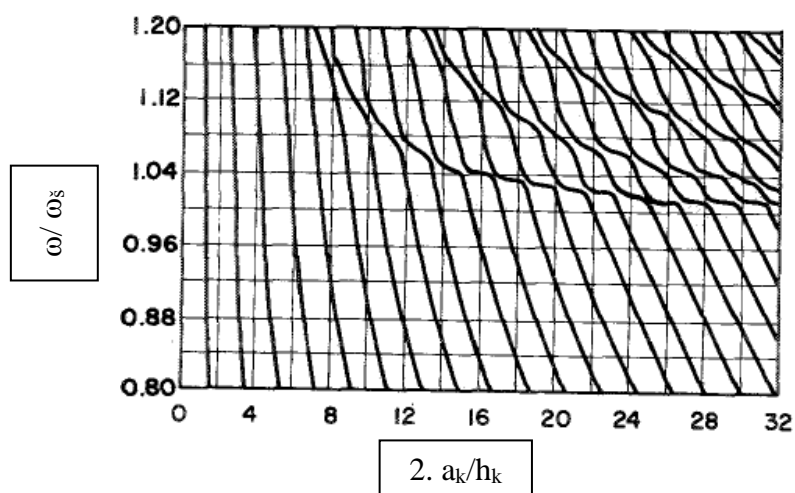
$G$  [MPa] je modul pružnosti v šmyku.

Na základe riešeného problému je dobré si uvedomiť, či je nutné zaoberať sa v danom prípade šmykovou deformáciou, resp. zotrvačnosťou. V niektorých technických riešeniach je namieste však brať do úvahy spomenuté fakty. Na Obr. 10 vidíme pomernú závislosť, ktorá bola vykreslená z predpokladu štandardnej teórie rovinných dosiek. V porovnaní s týmto je Obr. 11. Z jednoduchého pohľadu je vidieť rozdiely. Vplyv šmykových deformácií a zotrvačnosti v oblasti určovania frekvencií spôsobuje tieto rozdiely - znižovanie frekvencie s rastúcim rozmerovým pomerom, vykresľovanie väčšieho množstva frekvencií v rozsahu  $\omega/\omega_s$  pre konkrétnu rovinnú dosku, značná zmena kriviek vo vysokofrekvenčnej oblasti ( $\omega/\omega_s > 1$ ) [1].

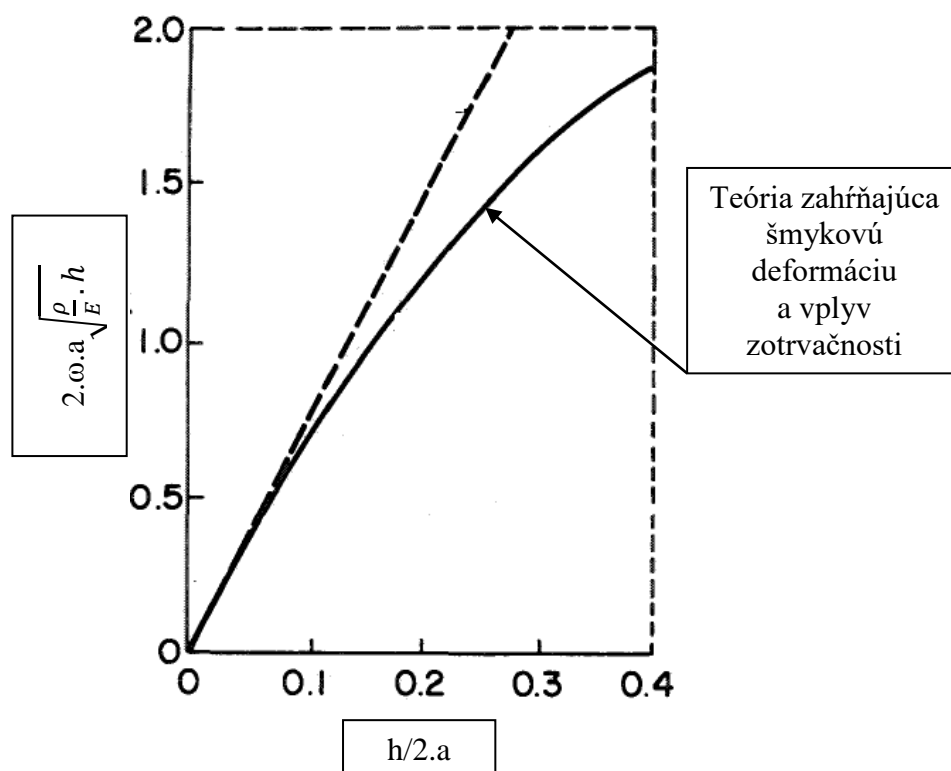


Obr. 10 Frekvenčno-rozmerová závislosť odvodená od štandardnej teórie pre prípad upnutej kruhovej dosky [7]

Názornejší pohľad na rozdiely je znázornený na Obr. 12. Z tohto obrázku je jasne vidieť, že s rastúcimi rozmermi, ale aj frekvenčnými parametrami je vplyv šmykových deformácií a zotrvačnosti markantnejší.



Obr. 11 Frekvenčno-rozmerová závislosť odvodená od teórie zahŕňajúcej šmykové deformácie a zotrvačnosť pre prípad upnutej kruhovej dosky [7]



Obr. 12 Pomerová závislosť základných frekvenčných parametrov pre prípad SS kruhovej dosky [8]

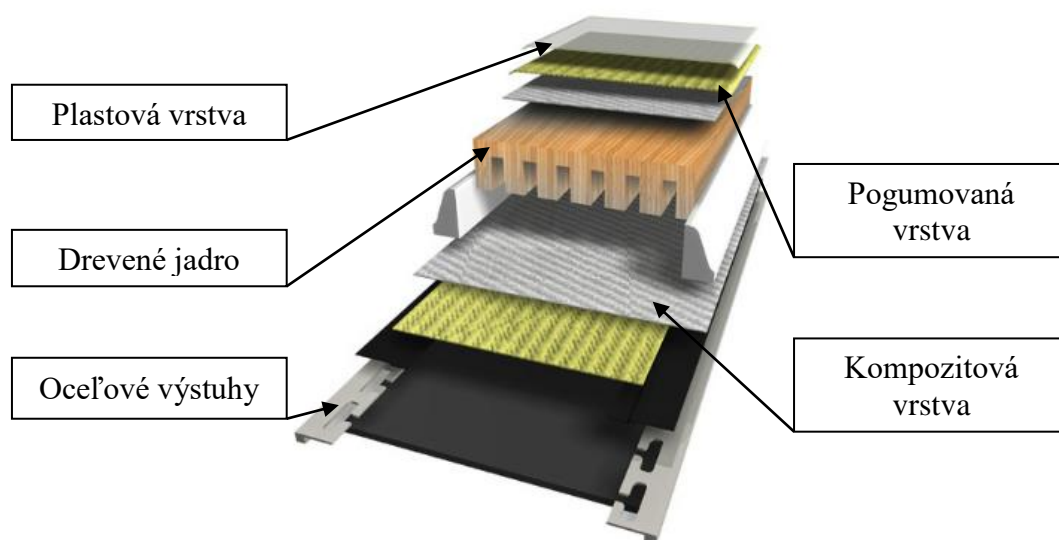
#### D. Nehomogenita

V niektorých záležitostiach riešenia vibrácií rovinných útvarov, čiže samotného stanovenia ich vlastných tvarov a frekvencií je potrebné uvažovať nad štruktúrou materiálu. Týka sa to najmä ne/homogenity. Práve nehomogenitou môžu byť spôsobené určité výchylky v mnohých ohľadoch. Najčastejšie sa jedná o správanie spojitých vláknových štruktúr – zväčša záležitosť kompozitových, laminátových súčastí. Zaoberaním sa nehomogenitou je potrebné neopomenúť aj rôzne trhliny, výrezy či prípadné vyvrtané otvory v materiály. Z pohľadu určovania vlastných módov majú taktiež nezanedbateľné opodstatnenie. V bežnej praxi sú z hľadiska nehomogénnych rovinných štruktúr často uplatňované aj tzv. sendvičové dosky. V jednoduchosti sú zložené z jadra (polystyrénové, penové, z vlnitého plechu, tzv. „honeycomb“ jadro,...), ktoré je z dvoch strán zlepené dvoma pásmi materiálu. Typický príklad sendvičovej konštrukcie je uvedený na Obr. 13. Pri akomsi teoretickom vyhodnocovaní vibračného správania je predpokladané jadro elasticky spojité, homogénne. A teda celkovo je uvažovaná vrstvená štruktúra rovinnnej dosky. Doposiaľ zistených a zavedených bolo niekoľko výpočtových postupov – modelových zjednodušení, podľa ktorých je možné dospieť k hľadaným hodnotám frekvencií. Jedna z teórií uvažuje rovinnú dosku pozostávajúcu z lepených vrstiev, ktoré majú homogénne izotropické vlastnosti a riadia sa Kirchhoffovou hypotézou normál [1].

Ďalším zovšeobecnením podľa [9] je predpokladané spojenie dvoch druhov vrstiev. Takzvanej „mäkkej“ a „tvrdej“ vrstvy. Tvrde vrstvy sa správajú podľa Kirchhoffovej hypotézy, kdežto vo vrstvách označených ako „mäkké“ dochádza k preklzom. Platí predpoklad, že pôsobiace



napätia v rovine ( $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ , a  $\tau_{xy}$ ) sú nulové, kým priečne šmykové napätia  $\tau_{yz}$  a  $\tau_{zx}$  sú konštantné v rámci celej vrstvy [1].



Obr. 13 Sendvičová konštrukcia lyže [10]

## 2 TEÓRIA MODÁLNEJ ANALÝZY

Z pohľadu histórie môže byť modálna analýza označovaná ako pomerne mladá oblasť dynamiky, ktorá získavala svoje opodstatnenie až niekedy v 80. rokoch 20. storočia najmä vďaka rozvíjajúcemu sa programovému vybaveniu. Je myslený hlavne vývoj softvérových programov zameraných na uplatnenie metódy konečných prvkov (MKP). Často využívané programy môžu byť napríklad ANSYS, NASTRAN a iné. Modálna analýza je z hľadiska technickej praxe využívaná najmä pri diagnostike vibrácií rozličných strojných súčastí, ďalej pri analýze nežiaducich javov, ako sú napr. hluk, deformácie alebo chvenie mechanických sústav. Modálnou analýzou sú vyhodnocované nasledujúce parametre: vlastné frekvencie, vlastné tvary kmitov a modálne tlmenie súčasti alebo poprípadne nejakej sústavy [12].

Dôvody využitia modálnej analýzy podľa [12]:

- Hlavne možnosť porovnávania nameraných dát z experimentu s výsledkami dosiahnutými prostredníctvom numerického, poprípadne analytického postupu. Môže sa to napríklad týkať vývoja nového prototypu, na ktorom je potrebné zneškodniť čo najviac technických nedostatkov predtým, než následne pôjde do sériovej výroby.
- Za pomoci získaných vlastných frekvencií daného systému je možné predvídať nebezpečné prevádzkové stavy, v ktorých môžu byť prostredníctvom rôznych budiacich síl emitované rezonancie systému. Touto znalosťou sú zamedzené mnohé poškodenia, ktoré by v opačnom prípade výrazne ovplyvňovali životnosť súčasti.
- Znalosťou vlastných tvarov skúmaného systému je možné modifikovať štruktúru (geometriu, materiál) tak, aby bolo možné upravenie maximálnych výchyliek v takých miestach, kde je to nežiaduce, až nebezpečné.
- Vyhodnotené modálne parametre môžu slúžiť aj na diagnostiku prípadných porúch daného strojného systému. Na základe nasnímaného signálu pri experimente sú vytvárané rôzne multispektrá alebo tzv. Cambelove diagramy, z ktorých je možné vyhodnocovať napríklad prípadnú nevyváženosť, nesúososť v systéme, zábery ozubení, poprípadne rôzne defekty (trhliny).

### 2.1 ANALYTICKÝ PRÍSTUP

Pri uplatňovaní analytických vzťahov v modálnej analýze je nutné poznať najmä základné materiálové charakteristiky ( $E$ ,  $\rho$ ,  $\nu$ ) daného systému. Avšak na základe vyššie spomenutej podkapitoly 1.2.1 pri stanovení vlastných frekvencií dosiek je potrebné poznať aj ich geometriu. Vo všeobecnosti sú v modálnej analýze vyhodnocované voľne kmitajúce konzervatívne (netlmené) sústavy, ktoré môžu byť zapísané pohybovou rovnicou v maticovom tvare podľa [12]:

$$\mathbf{M}_s \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_s \mathbf{q} = \mathbf{0}, \quad (19)$$

kde  $\mathbf{M}_s$  [kg] je symetrická matica hmotnosti sústavy,

$\mathbf{K}_s$  [N.m<sup>-1</sup>] je symetrická matica tuhosti sústavy,

$\mathbf{q}$  [mm] je vektor polohy,

$\ddot{\mathbf{q}}$  [m.s<sup>-2</sup>], je vektor zrýchlenia.

Pre jasný pohľad na stanovenie vlastnej frekvencie sústavy, je vhodné využiť systém s jedným stupňom voľnosti, ktorého vlastná frekvencia je popísaná jednoduchým vzťahom podľa [13]:

$$\Omega = \sqrt{\frac{k_s}{m_s}} [\text{rad.s}^{-1}], \quad (20)$$

kde  $k_s$  [N.m<sup>-1</sup>] je tuhosť sústavy,

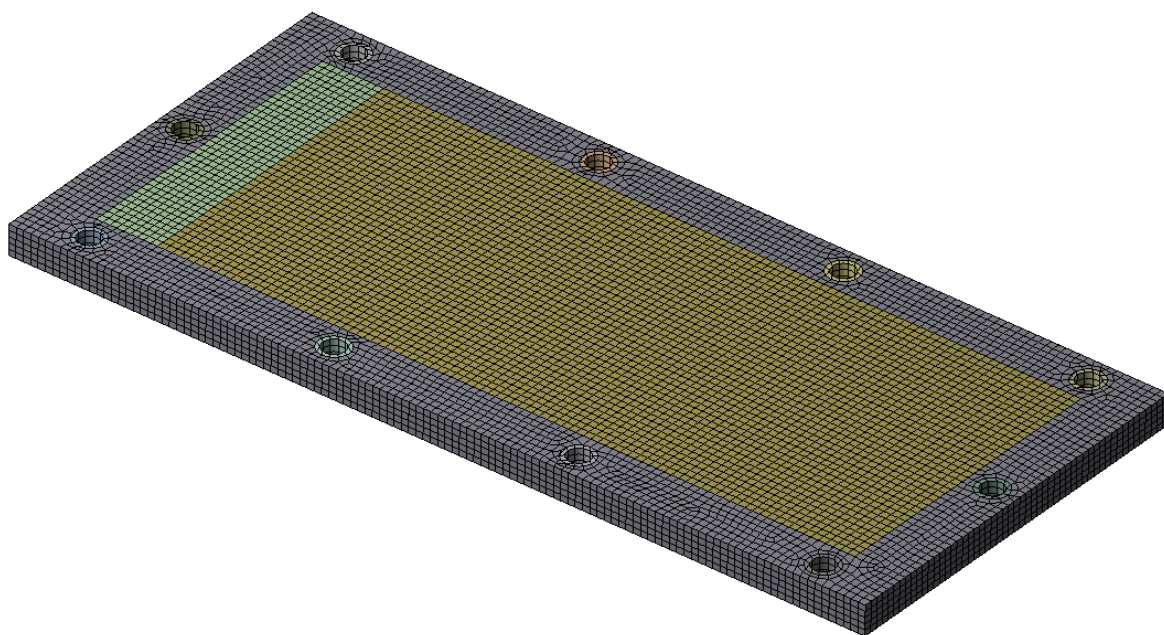
$m_s$  [kg] je hmotnosť sústavy.

## 2.2 NUMERICKÝ PRÍSTUP ZA POMOCI MKP

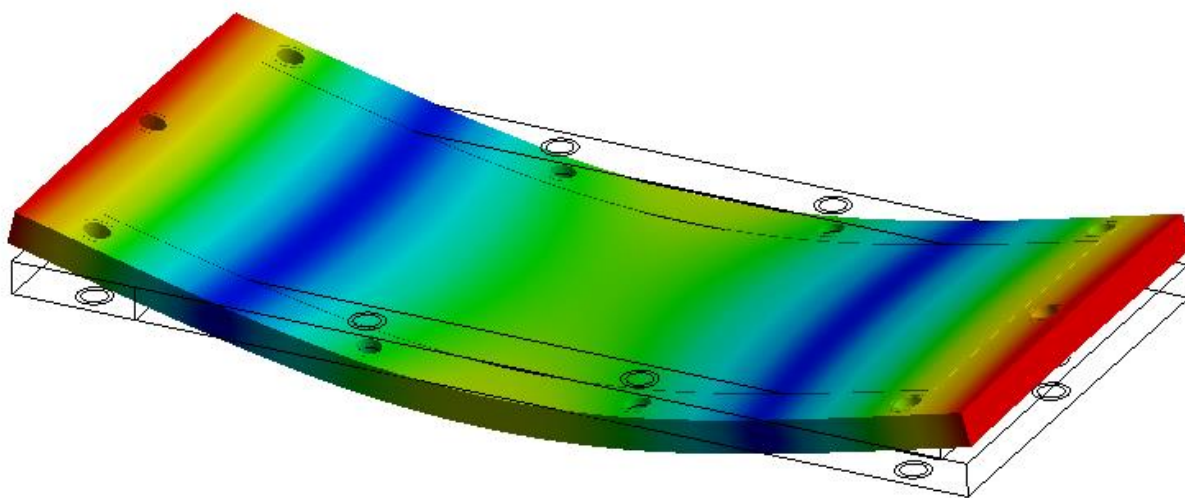
Ďalším, v súčasnosti najčastejšie sa uplatňujúcim prístupom v rozličných pevnostných, teplotných analýzach, pri analýzach prúdení a samozrejme aj v modálnych analýzach sú využívané počítačové programy na báze MKP. Dosiahnuté výsledky z modálnej analýzy môžu byť ďalej využívané napríklad v harmonickej analýze, pri analýze náhodných vibrácií alebo taktiež aj pri analýze spektra odozvy. Získané vlastné módy (vlastné frekvencie a vlastné tvary danej štruktúry) z numerického výpočtu sú ďalej porovnávané s reálne nameranými hodnotami pri laboratórnych testoch.

Samotná príprava výpočtu modálnej analýzy s prístupom MKP môže byť vykonaná v nasledujúcich krokoch podľa [12]:

1. Vytvorenie geometrie skúmanej súčasti v CAD programe a následné načítanie tejto geometrie do zvoleného programu MKP.
2. Vybranie vhodného prvku – elementu, ktorým bude následne vytváraná konečno prvková sieť.
3. Zadefinovanie požadovaných materiálových vlastností modelu (hustota materiálu  $\rho$ , Poissonove číslo  $\nu$ , Youngov modul pružnosti  $E$  materiálu).
4. Na základe zvoleného elementu je vytvorený konečno prvkový (viď na Obr. 14). Je vytváraná konečno prvková sieť, dostatočne jemná, aby výpočet bol čo najpresnejší, no na druhej strane je potrebné brať do úvahy aj časovú náročnosť výpočtu, kedy nadmerné zjemnenie už výrazným spôsobom neovplyvňuje dané výsledky.
5. Stanovenie/zadefinovanie korektných okrajových podmienok. Zohľadnenie mechanických väzieb vo výpočte.
6. Nastavenie riešiteľa s vhodným výpočtovým algoritmom. Zvolenie požadovaného počtu módov na vyhodnotenie, prípadné zadanie frekvenčného rozsahu, v ktorom má daný výpočet prebiehať.
7. Exportovanie hľadaných modálnych parametrov, vykreslenie vlastných tvarov (viď Obr. 15 ).



*Obr. 14 Konečno prvkový model rovinnej dosky*



*Obr. 15 Prvý modálny tvar rovinnej dosky*

## 2.3 EXPERIMENTÁLNY PRÍSTUP

Experimentálna modálna analýza spočíva v meraní modálnych parametrov reálnej (fyzickej) súčasti v laboratórnych podmienkach. Ako bolo už vo vyššie uvedených odsekoch spomenuté, spolu s experimentálnym prístupom je možné verifikovať výsledné modálne parametre so získanými analytickými/numerickými výsledkami.

Dôležitým aspektom v oblasti analýzy kmitania je tzv. frekvenčná prenosová (odozvová) funkcia. Táto funkcia v podstate vyjadruje vzťah medzi samotnou odozvou sústavy a jej

budením. Frekvenčná prenosová funkcia, z anglickej literatúry nazývaná aj frequency response function (FRF), môže mať nasledujúci tvar podľa [12]:

$$H(\omega) = \frac{\text{výstup}}{\text{vstup}} = \frac{\text{pohyb}}{\text{sila}} = \frac{\text{odozva}}{\text{budenie}} \quad (21)$$

Z hľadiska charakteru odozvového parametra (výchylka, rýchlosť, zrýchlenie) sú uvedené v Tab. 1 podľa [14] 3 typy frekvenčných prenosových funkcií. Príklad všeobecného označovania frekvenčnej prenosovej funkcie je uvedený v rovnici (22). V prípade uvažovania konkrétneho odozvového parametra je využívaný maticový zápis. Na presné definovanie jedného prvku matice frekvenčnej odozvovej funkcie, napr. pre maticu poddajnosti, je uvedený podľa [13] nasledujúci vzťah:

$$\alpha_{jk}(\omega) = \frac{x_j}{F_k} = \sum_{r=1}^N \frac{\Phi_j^r \cdot \Phi_k^r}{\lambda_r^2 - \omega^2}, \quad (22)$$

kde  $F_k$  [N] je harmonická budiaca sila,

$x_j$  je miesto pôsobenia budiacej sily,

kde  $\lambda_r$  je vlastné číslo r-tého módu,

$\Phi_j^r$  je j-tý prvok r-tého vektoru vlastných tvarov,

$N$  je počet módov.

Tab. 1 Frekvenčná prenosová funkcia

Frekvenčná prenosová (odozvová) funkcia		
Odozvový parameter	Štandardná $\frac{\text{odozva}}{\text{budenie}}$	Inverzná $\frac{\text{budenie}}{\text{odozva}}$
Výchylka	Dynamická poddajnosť	Dynamická tuhosť
Rýchlosť	Pohyblivosť	Impedancia
Zrýchlenie	Akcelerácia (zrýchlenie)	Zdanlivá hmotnosť

Samotný priebeh experimentálnej modálnej analýzy je možné rozdeliť podľa [12] do niekoľkých bodov (krokov):

1. Predpríprava experimentálneho merania
  - a. Označenie meracích bodov na meranej súčasti – vytvorenie tzv. siete meracích bodov.
  - b. Zvolenie budiaceho a meracieho bodu na súčasti.
  - c. Korektné uloženie meranej štruktúry, podľa uvažovaných okrajových podmienok.
  - d. Zvolenie spôsobu budenia (dynamickým budičom vibrácií alebo impulzným budením prostredníctvom modálneho kladivka).
  - e. Výber snímačov sily a snímačov odozvy (zrýchlenia, rýchlosti a výchylky). V mnohých prípadoch je potrebné uvažovať aj prípadné aplikovanie bezkontaktných snímačov.
  - f. Vhodné nastavenie analyzátora na spracovanie signálu.
  - g. Kalibrácia snímačov a kontrola nastavenia celej meracej techniky, t. z. aj počítačového vybavenia.
2. Meranie modálnych dát
  - a. Prichytenie snímača odozvy (resp. nastavenie lúča laserového vibrometru) do meracieho bodu.
  - b. Budenie štruktúry použitým budičom vibrácií.
  - c. Vytvorenie záznamu nasnímaných signálov v označených meracích/budiacich bodoch.
3. Analýza nameraných dát
  - a. Vyhodnotenie nameraných výsledkov. Následné porovnávanie s hodnotami získanými prostredníctvom výpočtových postupov.
  - b. Možnosť rozšírenia experimentu o harmonickú analýzu. Vytvorenie amplitúdo-frekvenčnej charakteristiky.

### POUŽÍVANÁ MERACIA APARATÚRA

Dôležitým faktom na správnu realizáciu experimentálneho merania je bezpochyby aplikovanie správneho meracieho aparátu pre danú meranú štruktúru. Na základe znalostí z [13] je možné rozdeliť merací aparát na niekoľko častí:

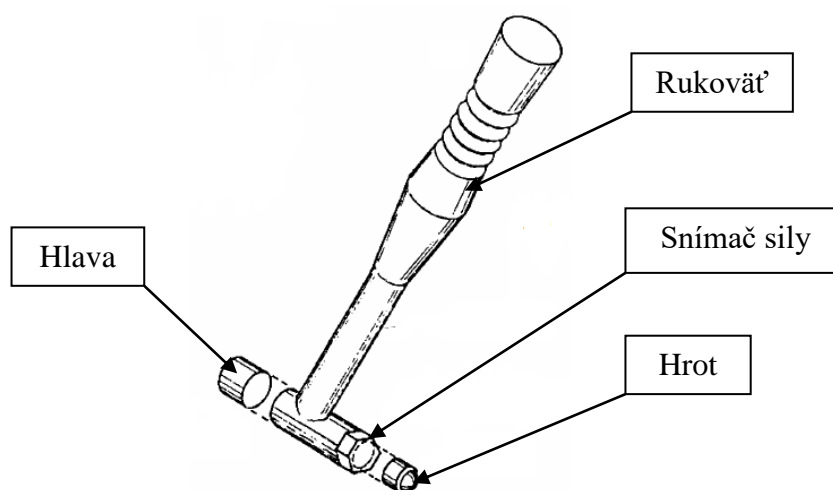
- Mechanizmus budenia pre danú štruktúru
- Zostava snímačov na meranie budiacej sily a odozvy
- Analyzátor schopný záznamu hľadaných dát
- Výpočtové vybavenie (softvér) na spracovanie získaných dát

Z pohľadu charakteru budenia danej štruktúry sú známe 2 základné spôsoby podľa [13]:

1. Rázové budenie
  - a. Modálnym (rázovým) kladivkom – najčastejší spôsob
  - b. Kyvadlovým rázovadlom
  - c. Úderom prostredníctvom padajúcej hmoty
2. Rozkmitanie za pomoci budiča vibrácií
  - a. Elektromagnetickým budičom
  - b. Elektro-hydraulickým budičom
  - c. Mechanickým budičom

### Budenie rázovým kladivkom

Jedná sa o veľmi jednoduchý a relatívne rýchly spôsob budenia vibrácií v danej štruktúre. Modálne kladivko (viď Obr. 16 ) pozostáva zo štyroch základných častí: rukoväti, hlavy, hrotu a snímača sily. Výbava každého modálneho kladivka ďalej pozostáva zo sady hrotov rozličných tuhostí a z niekoľkých hláv viacerých hmotností. Rôznymi kombináciami týchto hrotov a hláv je možné do určitej miery ovplyvňovať frekvenčný rozsah merania a taktiež aj samotnú budiacu silu. Čiže frekvenčný rozsah, ktorý je budený rázovým kladivkom závisí na kontaktnej tuhosti stretávajúcich sa povrchov (hrot kladivka – povrch súčasti) a hmotnosti hlavy kladivka. Použitím kladivka na meranej súčasti je vyvolaný silový impulz. Na zvýšenie frekvenčného rozsahu je potrebné skrátenie pulzu, ktoré je možné doceliť práve prostredníctvom zvýšenia tuhosti stýkajúcich sa materiálov (teda hrotom kladivka) a hmotnosťou hlavy. Použitie rázového kladivka má niekoľko úskalí, ako napr. nemožnosť aplikovania frekvenčnej lupy pri regulácii pásma budenia, ďalej v nutnosti použitia špeciálnej váhovej funkcie na vstupnom a výstupnom signály. Na druhej strane niektoré nevýhody pri tomto type budenia je možné odstrániť pomocou tzv. náhodného rázového budenia. Jedná sa o aplikovanie viacerých po sebe idúcich úderov v priebehu časového záznamu. Vhodné najmä pri meraní v nižšom frekvenčnom pásme [13], [15].

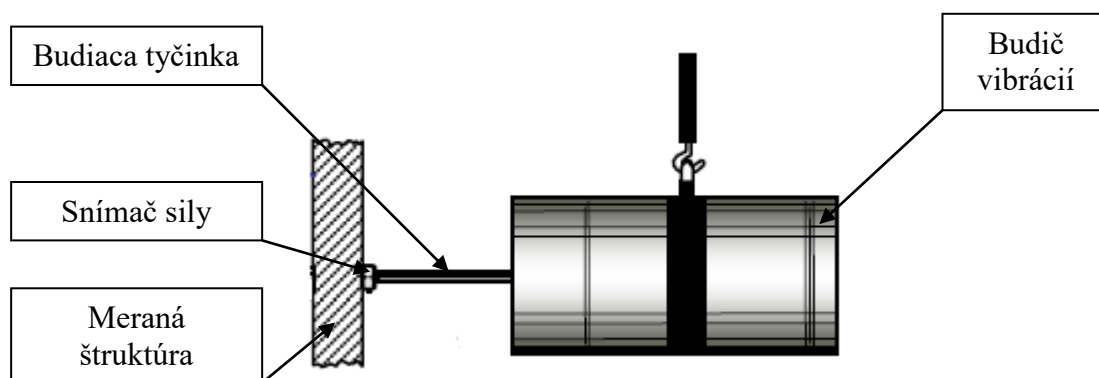


Obr. 16 Detail rázového kladivka [13]

### Budenie s využitím budiča vibrácií

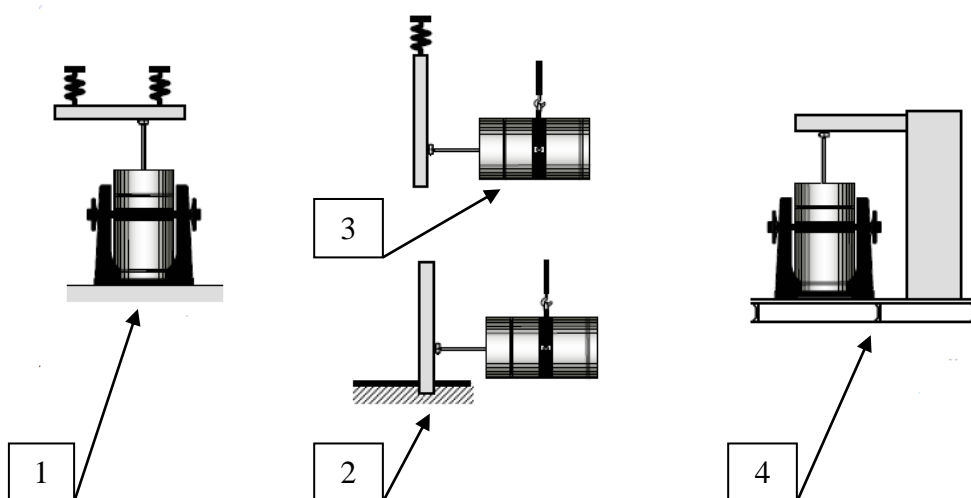
Z veľkej časti meraní je využívaný princíp elektromagnetického budiča vibrácií. Vstupný signál je privedený do striedavého magnetického poľa, v ktorom je umiestnená cievka. Tá je upevnená k poháňacej časti zariadenia a cez budiacu tyčinku (viď Obr. 17) spojená s meranou štruktúrou. Týmto prístupom budenia vibrácií je umožnené pružné ovládanie, čím sú myslené frekvencie a amplitúdy budenia vibrácií, ktoré sú riadené nezávisle. Taktiež je týmto typom budiča umožnené merať v relatívne veľkých frekvenčných rozsahoch (až do 30 – 50 kHz), ktoré závisia predovšetkým aj od samotnej výkonnosti budiča vibrácií. Vo všeobecnosti je možné povedať, že čím väčší budič rovná sa väčšia budiaca sila. Je taktiež potrebné zobrať do úvahy, že účinné budenie je platné len do tej doby, kedy sa pohyblivá časť budiča správa ako tuhá hmota. V opačnom prípade je hodnota budiacej sily výrazne zoslabená a to má výsledný efekt na frekvenčný rozsah merania. V ojedinelých prípadoch sú využívané taktiež elektro-

hydraulické budiče vibrácií. Oproti ostatným typom budičov sú schopné aplikovať súčasne dynamické aj statické vibračné zaťaženie, ďalej je nimi možné budiť štruktúry na relatívne veľkých amplitúdach (dať tzv. dlhý úder). Avšak v porovnaní s elektro-magnetickými budičmi majú obmedzený pracovný frekvenčný rozsah (väčšinou do 1 kHz). Ďalším používaným typom budiča vibrácií je mechanický budič, ktorého princíp je založený na rotujúcich hmotách s excentrickým uložením. Často používaný pri meraní masívnejších štruktúr (mostov, atď.) [13], [15].



Obr. 17 Schéma zapojenia elektromagnetického budiča vibrácií [13]

V problematike budiča vibrácií je dobré spomenúť ešte základné druhy uchytenia budiča k samotnej štruktúre. Na Obr. 18 sú znázornené 3 prípady uloženia. V prípade uloženia číslo 1 je budič vibrácií uložený pevne a meraná štruktúra voľne. Uloženie číslo 2 zobrazuje pevne uchytenú súčasť a voľne uložený budič. Číslo 3 je veľmi zriedkavým uložením, kedy aj budič, aj meraná štruktúra sú uložené voľne. Posledným a nevhodným príkladom je uloženie 4, kedy je budič vibrácií a meraný objekt uložený napevno [13], [15].



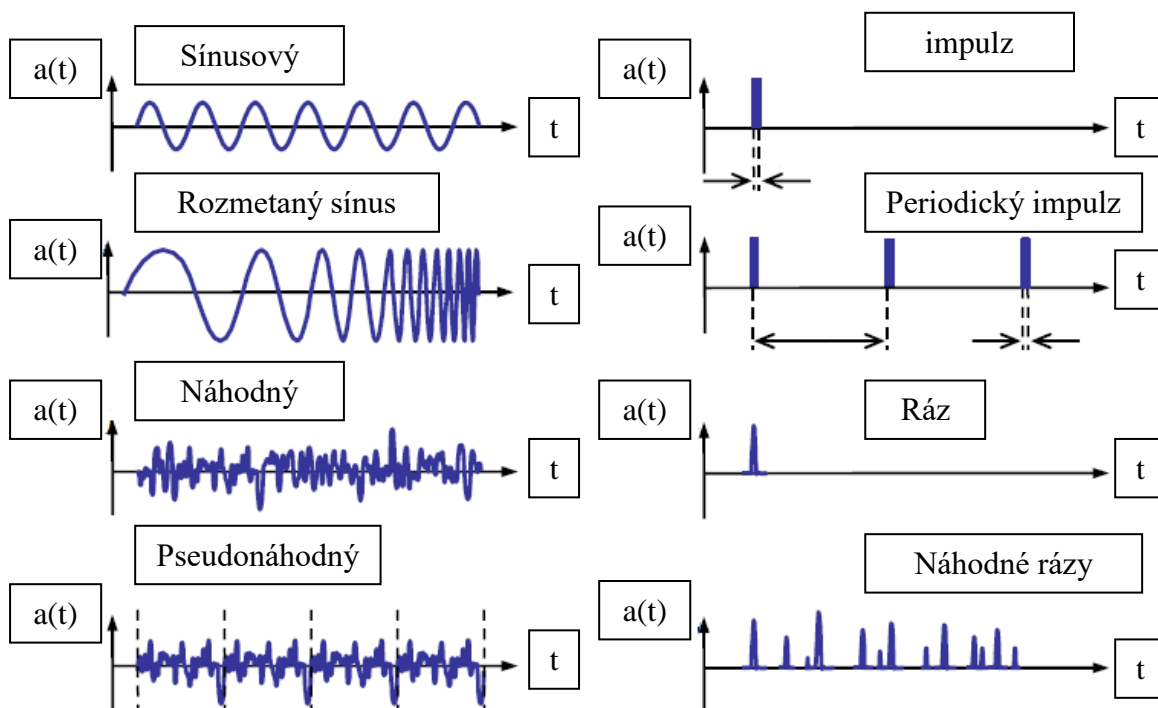
Obr. 18 Druhy uloženia budiča vibrácií ku meranej štruktúre [13]



## Typy budiacich signálov

Na základe výberu budiča vibrácií, je možné danú štruktúru budiť niekoľkými typmi signálov, viď Obr. 19. V praxi sú známe tieto druhy budiacich signálov podľa [13]:

- Harmonický – sínusový signál konštantnej frekvencie. Používaný v FRA analyzátoroch, kedy je meraná ustálená odozva systému na harmonický typ budenia. Spôsob budenia, ktorým je možné skúmanie nelineárnych vlastností danej štruktúry.
- Širokopásmový – tvorený časťami rôznych frekvenčných spektier.
  - Impulzný (prechodový) – z veľkej časti je uplatňovaný pri aplikovaní rázového kladivka. Impulzový signál možno chápať ako jeden impulz (ráz), periodický impulz alebo náhodné rázové budenie.
  - Náhodný – tento typ signálu je možné využiť aj na meranie základného pásma, tak aj pri meraní pomocou frekvenčnej lupy. Keďže náhodný signál nie je periodický v čase, je potrebné využívať tzv. Hanningovo okno pre vstupný aj výstupný signál z dôvodu obmedzenia chyby únikom.
  - Pseudonáhodný – časť náhodného signálu, opakujúceho sa periodicky. Vhodný na budenie dokonale lineárnych systémov.
  - Rozmetaný sínus



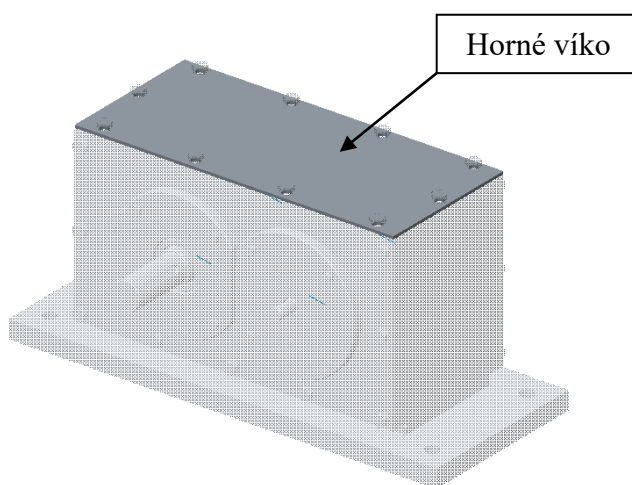
Obr. 19 Typy budiacich signálov [13]

### Snímače budiacej sily a odozvy

Výber meracích snímačov v experimentálnej modálnej analýze je priamo ovplyvnený práve druhom budenia danej štruktúry. Pri meraní modálnych vlastností prostredníctvom rázového budenia je snímač sily uložený priamo v hlave kladivka. Veľkosť tejto sily priamo závisí od úderu osoby, ktorá experiment vykonáva a samozrejme od jednotlivých tuhostí stykových plôch. Ako snímač odozvy pri takomto type budenia je najčastejšie využívaný merač zrýchlenia – akcelerometer. Pri použití snímača zrýchlenia je nutné uvážiť jeho hmotnosť a spôsob, akým bude prichytený ku meranej súčasti. Najpoužívanejšími uchyteniami sú: uchytenie skrutkou, špeciálnym lepidlo, obojstrannou páskou, včelím voskom a v niektorých prevádzkových prípadoch magnetom. V prípade, že meraná štruktúra je budená prostredníctvom tzv. budiča vibrácií, snímač sily je upevňovaný priamo na meranej časti. Najčastejšie je buďto pripevnený skrutkou priamo do štruktúry alebo pripevnený skrutkou cez malý valček, ktorý je hladkou plochou lepený na meraný objekt. Pri výbere snímača odozvy je nutné prihliadať najmä jeho hmotnosti. V jednoduchosti je platné, že čím je menší snímač, tým je menej citlivejší, avšak na druhej strane výberom väčšieho snímača môže dôjsť ku výraznému ovplyvneniu dynamických vlastností celej štruktúry. V takom prípade je vhodné využiť bezkontaktný spôsob merania odozvy pomocou laserového vibrometru [13].

### 3 VÝPOČTOVÝ PRÍSTUP STANOVENIA VLASTNÝCH MÓDOV OBDĹŽNIKOVEJ DOSKY

Z hľadiska výpočtového stanovenia vlastných frekvencií a tvarov boli použité 2 prístupy. Ako prvý bol zvolený analytický výpočet a druhým bol numerický výpočtový prístup za pomoci počítačového vybavenia. Podrobný popis jednotlivých výpočtových postupov vid' v nasledujúcich podkapitolách. Zvolený objekt (rovinná súčasť - doska), na ktorom boli stanovené vlastné frekvencie a tvary výpočtovým prístupom, ale nasledovne aj experimentom, bolo horné víko experimentálnej prevodovky, ktoré je na Obr. 20. Konkrétne boli vyhodnotené vlastné tvary a vlastné frekvencie pre dve varianty hrúbky obdĺžnikového víka. Je vhodné uviesť, že experimentálna prevodovka bola vytvorená Ing. Alešom Prokopom Ph.D. Samotná prevodovka nebola predmetom záujmu a teda nebudú k nej písané žiadne bližšie špecifikácie.



Obr. 20 Zvýraznené horné víko experimentálnej prevodovky [14]

#### 3.1 ANALYTICKÝ VÝPOČET VLASTNÝCH FREKVenciÍ OBDĹŽNIKOVEJ DOSKY

Vyššie už bolo spomenuté, že predmetom analytických výpočtov bolo horné víko experimentálnej prevodovky. Boli vyčíslené hodnoty vlastných frekvencií pre dve varianty hrúbky víka – 3 mm a 12 mm. Pri každej z oboch variant hrúbky boli aplikované postupy pre dva druhy uložení. Pre rovinnú dosku uloženú voľne (4xF – vid' Obr. 21) a pre druhú variantu votknutého uloženia (CFFF – vid' Obr. 22).

Samotné analytické vyčíslenie vlastných frekvencií bolo spracované v počítačovom programe MATHCAD. Najskôr na základe CAD modelu horného víka boli zapísané jeho základné geometrické rozmery a materiálové konštanty z ktorých sa vo výpočtoch vychádzalo.

Použité geometrické rozmery:

$$a_v = 0,350 \text{ [m]}$$

$$b_v = 0,158 \text{ [m]}$$

$$h_{v1} = 0,003 \text{ [m]}$$

$$h_{v2} = 0,012 \text{ [m]}$$

kde  $a_v$  je dĺžka víka,

$b_v$  je šírka víka,

$h_{v1}$  a  $h_{v2}$  sú dve varianty hrúbky víka.

Použité materiálové charakteristiky a konštanty:

$$E_v = 200 \cdot 10^9 \text{ [Pa]}$$

$$\nu_{pv} = 0,3 \text{ [ - ]}$$

$$\rho_v = 7850 \text{ [kg.m}^{-3}\text{]}$$

kde  $E_v$  je Youngov modul pružnosti víka,

$\nu_{pv}$  je Poissonova konštanta víka,

$\rho_v$  je hustota víka.

Z vyššie spomenutých charakteristík boli podľa [5] vyjadrené dve konštanty:

$$\gamma_v = h_v \cdot \rho_v \left[ \frac{\text{kg}}{\text{m}^2} \right], \quad (23)$$

kde  $\gamma_{v1,2}$  je konštanta vyjadrujúca hmotnosť na jednotku hrúbky víka s materiálovou hustotou  $\rho_v$ ,

$$o_v = \frac{a_v}{b_v} \text{ [ - ]}, \quad (24)$$

kde  $o_v$  je konštanta vyjadrujúca pomer dlhšej a kratšej hrany víka, pričom podľa tohto geometrického pomeru boli stanovené hodnoty bezrozmernej frekvenčnej konštanty z Tab. 2 a Tab. 3 na základe [5] pre šesť módov.

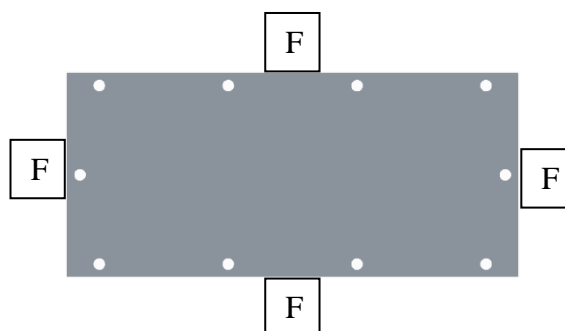
Tab. 2 Experimentálne stanovené frekvenčné konštanty pre uloženie obdĺžnikovej dosky 4xF

Hodnoty bezrozmernej frekvenčnej konštanty pre uloženie 4xF						
a/b	1.	2.	3.	4.	5.	6.
1,5	20,13	21,60	46,65	50,29	58,20	67,49
2,5	21,64	33,05	60,14	71,48	117,50	119,40

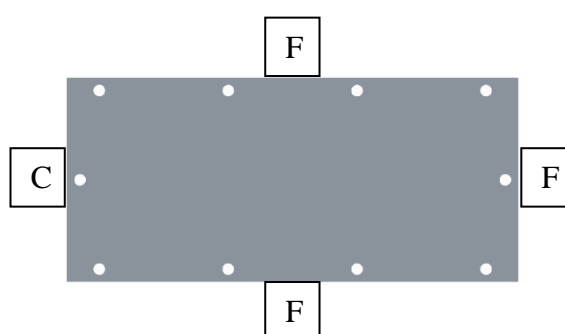
Tab. 3 Experimentálne stanovené frekvenčné konštanty pre uloženie obdĺžnikovej dosky CFFF

Hodnoty bezrozmernej frekvenčnej konštanty pre uloženie CFFF						
a/b	1.	2.	3.	4.	5.	6.
1,5	3,477	11,68	21,62	39,49	53,88	61,99
2,5	3,456	17,99	21,56	57,46	60,58	106,5

Na výpočet vlastných frekvencií obidvoch variant hrúbky víka pre dva typy uloženia obdĺžnikovej rovinatej dosky sa postupovalo podľa rovnice (6) na strane 13. Je dôležité spomenúť, že na stanovenie presných hodnôt bezrozmerných frekvenčných konštánt z Tab. 2 a Tab. 3 bola využitá v prostredí MATHCAD funkcia „linterp“. Vo výpočte neboli zahrnuté diery na skrutky M8x25. Jedná sa o veľmi malé otvory, výpočtovým modelom nebolo možné zahrnúť toto špecifické usporiadanie otvorov. Konkrétne výsledky z analytického výpočtu sú znázornené v Tab. 4.



Obr. 21 Grafické znázornenie voľného uloženia víka [14]



Obr. 22 Grafické znázornenie votknutého uloženia na kratšej hrane víka [14]

Tab. 4 Hodnoty vlastných frekvencií pre víko hrúbky 3 mm a 12 mm

Hodnoty vlastných frekvencií v Hz						
	Uloženie 4xF			Uloženie CFFF		
mód	3 [mm]	12 [mm]	Rozdiel [%]	3 [mm]	12 [mm]	Rozdiel [%]
1	126	505	300,8	21	82	290,5
2	177	709	300,6	96	386	302,0
3	335	1341	300,3	129	514	298,0
4	390	1558	299,5	312	1246	299,4
5	599	2396	305,8	349	1397	300,3
6	623	2491	299,8	559	2234	299,6

Analytickými výpočtami boli stanovené vlastné frekvencie prvých šiestich vlastných tvarov obdĺžnikového víka. Z dosiahnutých výsledkov v Tab. 4 je možné zhodnotiť, že pri druhej variante (teda pre dosku hrúbky 12 mm) sú hodnoty vlastných frekvencií približne o 300 % vyššie ako je tomu pri variante s hrúbkou 3 mm. Tento očakávaný rozdiel v jednotlivých vlastných módoch bol spôsobený práve štvornásobnou hrúbkou víka. Je vhodné pripomenúť, že pri výpočtoch oboch variant hrúbky víka boli uvažované rovnaké materiálové konštanty a súčasne bola zachovaná aj geometrická konštanta z rovnice (25) na strane 36 ( $\alpha_{v1} = \alpha_{v2}$ ).

### 3.2 NUMERICKÝ VÝPOČET VLASTNÝCH MÓDOV OBDĹŽNIKOVEJ DOSKY

Na numerické vyjadrenie vlastných tvarov a vlastných frekvencií horného víka experimentálnej prevodovky bol použitý výpočtový program ANSYS. Na začiatku bol do systémového prostredia WORKBENCH načítaný CAD model horného víka. Následne bol vytváraný výpočtový strom, ktorý je znázornený na Obr. 24. V systémovom prostredí DESIGN MODELER bol model víka rozdelený na niekoľko častí a to z dôvodu zaistenia čo najekonomickejšej siete. To znamená vytvoriť model z čo najmenšieho počtu elementov, resp. uzlov, avšak dostatočne jemnú sieť, zaistiťujúcu presné výsledky.

#### VYTVORENIE KONEČNO PRVKOVEJ SIETE

Bol vytvorený konečno prvkový model pre obe varianty hrúbky dosky prostredníctvom metódy „hex dominant“ s prvkami „solid 186“. Na jednotlivých modeloch bola aplikovaná ešte funkcia „sweep“, ktorá zaistila súmernosť rozdelenia elementov v smere hrúbky modelu. Na Obr. 23 je možné vidieť jednotlivé konečno prvkové modely pre obe varianty dosiek so zvýraznenými detailmi počtu elementov v smere hrúbky dosky.

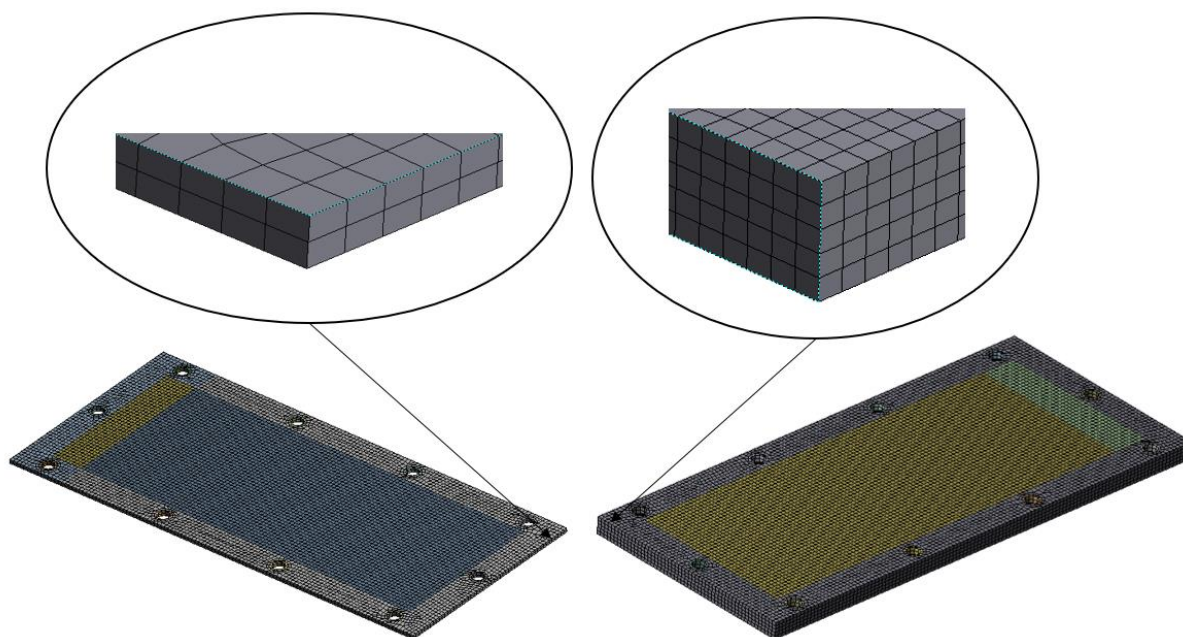
#### STANOVENIE NUMERICKÉHO VÝPOČTU

Po načítaní geometrie a vytvorení konečno prvkového modelu rovinnej dosky bol stanovený numerický výpočet modálnych vlastností. Zo systémovej ponuky WORKBENCH bolo vybrané okienko Modal (viď Obr. 24) a následne bolo zakomponované do pravej časti výpočtového stromu. Je vhodné spomenúť, že hodnoty použitých materiálových konštánt boli rovnaké ako pri analytickom stanovení vlastných frekvencií. Numerickým výpočtom boli vyhodnotené vlastné módy pre dva druhy uloženia rovinnej dosky. Jeden typ bolo voľné uloženie bez akýchkoľvek zadáných okrajových podmienok a druhým bolo simulované jednoduché

votknutie na kratšej hrane obdĺžnikovej dosky. V nastavení jednotlivých analýz výpočtu boli zvolené frekvenčné rozsahy pre obidve varianty hrúbky dosiek:

- Variant 1 (víko hrúbky 3 mm) – zvolený frekvenčný rozsah 0 až 2 kHz
- Variant 2 (víko hrúbky 12 mm) - zvolený frekvenčný rozsah 0 až 5 kHz

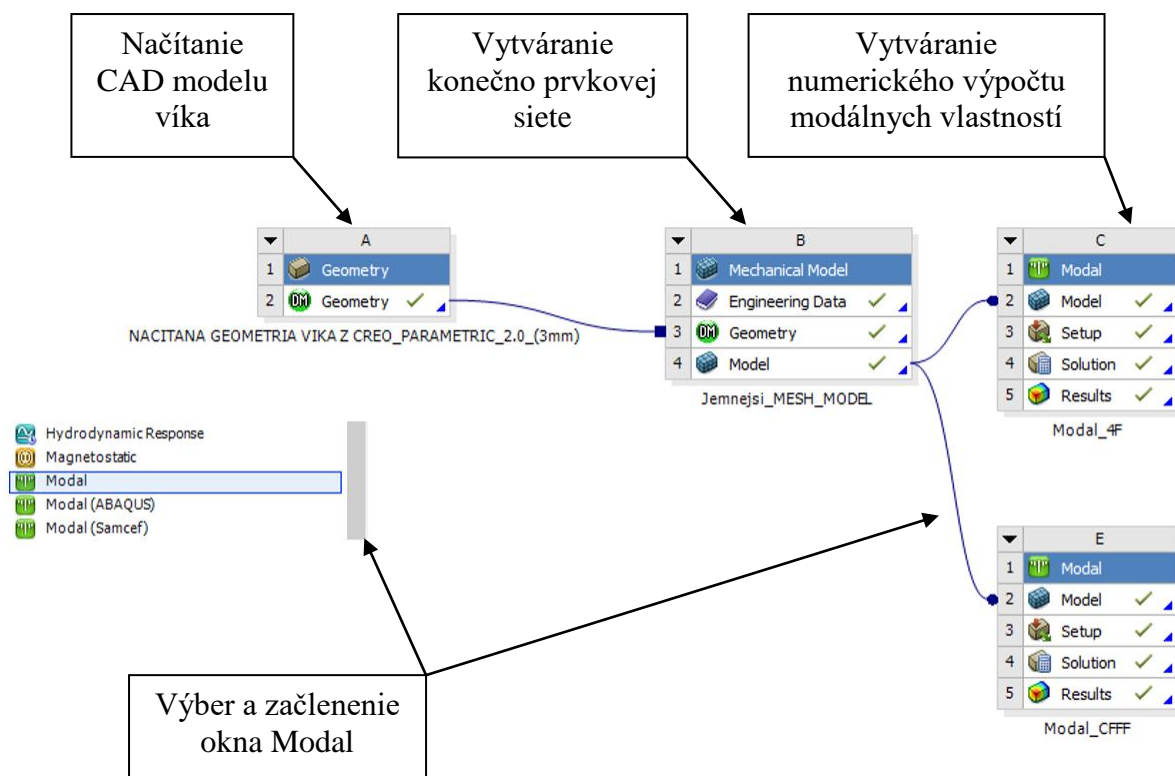
Z hľadiska výšky rozsahu je možné aj na základe získaných dát skonštatovať, že bol postačujúci. A to jednak z pohľadu množstva získaných vlastných tvarov a k nim prislúchajúcich vlastných frekvencií, ale aj z hľadiska praktického významu a praxe samotnej. Je však možné na druhej strane povedať, že v bežnej praxi by sa zväčša jednalo o prípady, kedy sú takéto typy rovinných dosiek pevne uchytené buďto nejakým skrutkovým alebo lepeným spojom k určitej tuhej štruktúre alebo bloku. V takom prípade by bolo potrebné riešiť takéto uchytenie ako celok a samozrejme poznať reálne prevádzkové podmienky, v ktorých by daná súčasť pracovala. Z toho by sa tak mohlo bližšie vyhodnotiť do akých frekvenčných rozsahov má význam riešiť numerický výpočet, resp. laboratórne meranie.



Obr. 23 Vytvorené konečno prvkové modely oboch variant dosiek

Výsledky modálnej analýzy získané z numerickej simulácie boli z hľadiska hodnôt vlastných frekvencií porovnané z analytickými a experimentálnymi výsledkami. Z pohľadu vlastných tvarov boli zrovnávané výsledky numerickej simulácie s experimentom pre voľne uložené obdĺžnikové dosky. V Tab. 5 a Tab. 6 sú porovnané hodnoty vlastných frekvencií získaných analytickým a numerickým výpočtom v rozsahu šiestich vlastných frekvencií. Z percentuálnych rozdielov je možné povedať, že výsledky vlastných frekvencií sú pri takto relatívne jednoduchých typoch uložení z väčšej miery podobné. Je vhodné podotknúť, že pri simulácií zložitejšie uchytenej štruktúry (je myslené zadanie viacerých okrajových väzbových

podmienok) by sa dozaista výsledky z analytického výpočtu výrazne vychyľovali tým z numerickej simulácie.



Obr. 24 Vytvorený výpočtový strom v systémovom prostredí WORKBENCH

Tab. 5 Porovnanie hodnôt vlastných frekvencií pre voľné uloženie (4xF)

Hodnoty vlastných frekvencií v Hz						
	Analytický výpočet		Numerická simulácia		Rozdiel [%]	Rozdiel [%]
mód	3 [mm]	12 [mm]	3 [mm]	12 [mm]	3 [mm]	12 [mm]
1	126	505	126	514	0	1,8
2	177	709	172	689	-2,9	-2,9
3	335	1341	350	1414	4,3	5,2
4	390	1558	373	1486	-4,6	-4,8
5	599	2396	627	2502	4,5	4,2
6	623	2491	633	2516	1,6	1



Tab. 6 Porovnanie hodnôt vlastných frekvencií pre votknuté uloženie (CFFF)

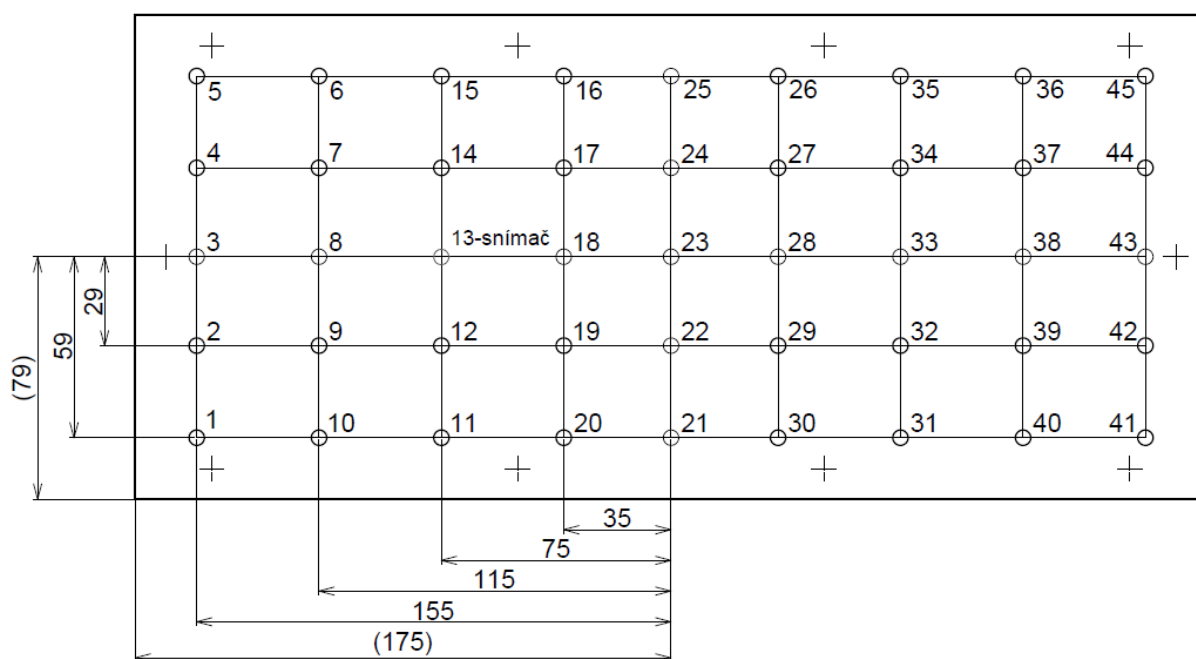
Hodnoty vlastných frekvencií v Hz						
	Analytický výpočet		Numerická simulácia		Rozdiel [%]	Rozdiel [%]
mód	3 [mm]	12 [mm]	3 [mm]	12 [mm]	3 [mm]	12 [mm]
<b>1</b>	21	82	20	81	-5	-1,2
<b>2</b>	96	386	96	374	0	-3,2
<b>3</b>	129	514	126	501	-2,4	-2,6
<b>4</b>	312	1246	308	901	-1,3	-38,3
<b>5</b>	349	1397	355	1197	1,7	-16,7
<b>6</b>	559	2234	580	1396	3,6	-60

## 4 EXPERIMENTÁLNA MODÁLNA ANALÝZA OBDĽŽNIKOVEJ DOSKY

Experimentálna modálna analýza bola realizovaná na voľnom uložení obdĺžnikovej dosky. A to pre variant hrúbky víka 3 mm a 12 mm. Technickým experimentom boli realizované dva prístupy budenia danej štruktúry. Prvý s využitím modálneho kladivka (viď podkapitola 4.1) a druhý pomocou budiča vibrácií (viď podkapitola 4.2). Z experimentálne získaných dát boli následne vyhodnocované modálne vlastnosti horného víka experimentálnej prevodovky.

### VYTvorenie BODOVEJ SIETE NA FYZICKOM MODELÝ HORNÉHO VÍKA

Pred samotným zostavením meracieho aparátu bola vytvorená sieť meracích bodov na oboch fyzických modeloch podľa Obr. 25. Na ploche obdĺžnikovej dosky bolo vyznačených 45 bodov, pričom bod číslo 13 bol v jednej variante použitý ako miesto uloženia snímača zrýchlenia a pri variante druhej bol v danom mieste umiestnený snímač sily. Vynesené kóty na Obr. 25 sú v milimetroch. Z hľadiska počtu zvolených bodov sa dá konštatovať, že bola zvolená pomerne hustá bodová sieť. To práve z dôvodu zachytenia/zaznamenania čo najväčšieho počtu vlastných tvarov danej súčasti.

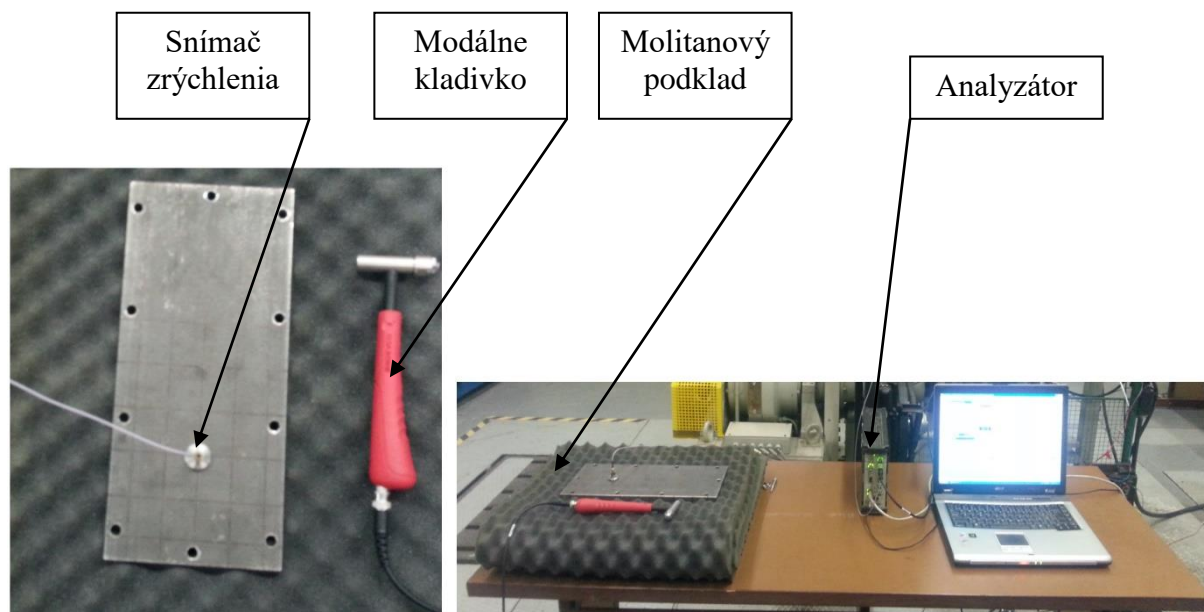


Obr. 25 Zostavenie meracích bodov

### 4.1 MODÁLNA ANALÝZA S POUŽITÍM RÁZOVÉHO KLADIVKA

Meranie modálnych vlastností prostredníctvom budiaceho kladivka bolo aplikované na víko hrúbky 12 mm. Ako bolo už vyššie spomenuté, realizovalo sa voľné uloženie dosky. V tomto prípade bola doska uložená na mäkkej podložke. Tento materiálový podklad mal rádovo nižšiu tuhosť ako merané oceľové víko, z čoho vyplýva, že bolo možné simulovať podmienky

voľného uloženia v laboratórnom prostredí. Oceľové víko bolo budené rázovým kladivkom v 44 bodoch (vzostupne podľa číselného vyznačenia na Obr. 25) okrem bodu číslo 13, kde bol umiestnený jednoosý snímač zrýchlenia zobrazený na Obr. 26. Ďalšiu súčasť meracieho aparátu tvoril päť-kanálový analyzátor B&K 3560-B-020 a počítač vybavený softvérovým programom PULSE Labshop. Na analyzátore boli zapojené dva kanály. Jeden kanál sprostredkoval silový impulz (vstupný signál) z rázového kladivka a druhým kanálom bol získavaný záznam odozvy (výstupný signál) zo snímača zrýchlenia. Samotné uchytenie snímača zrýchlenia bolo realizované magnetom.

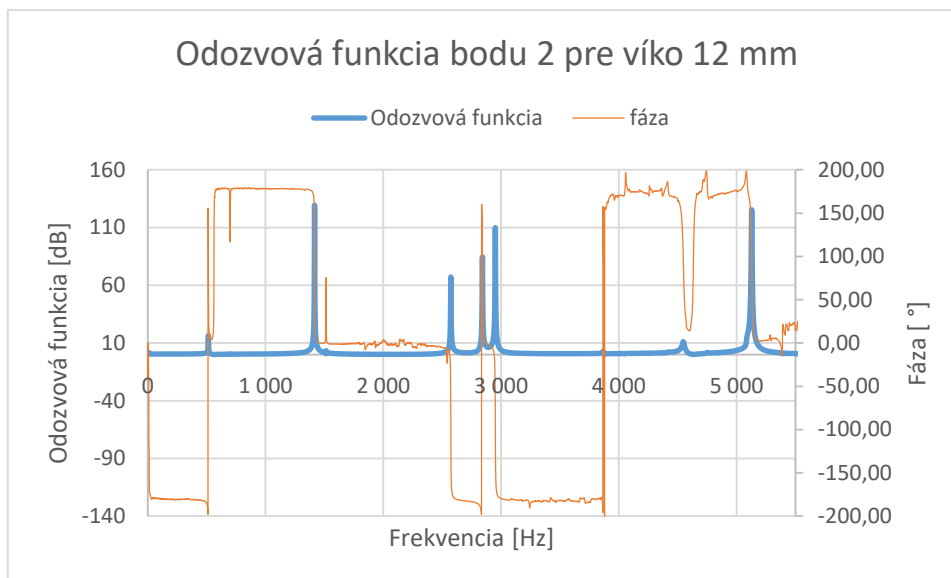


Obr. 26 Merací aparát modálnej analýzy pre víko hrúbky 12 mm

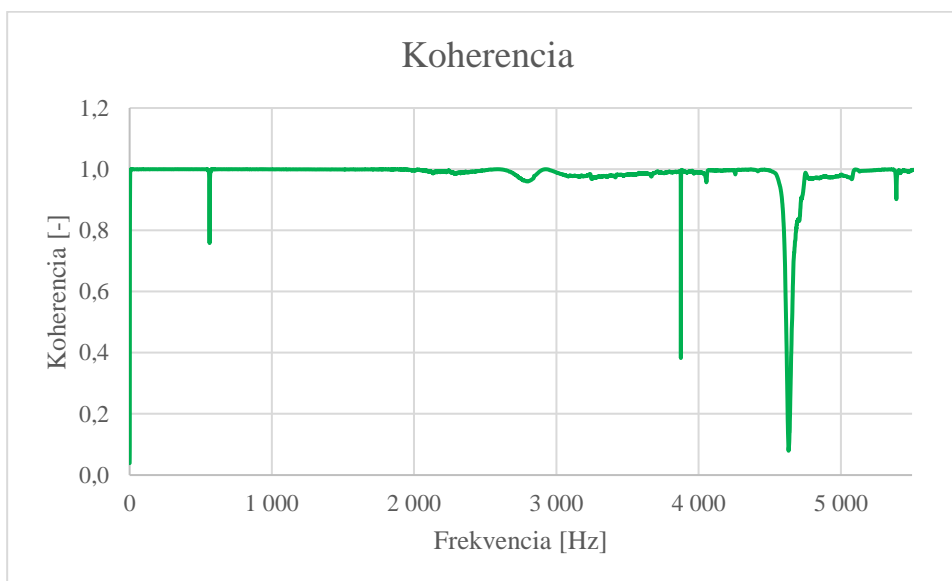
Po vybudení všetkých 44 bodov na štruktúre boli následne vyhodnocované v programe PULSE Labshop 3 druhy závislostí:

- Závislosť prenosovej funkcie na frekvencii
- Závislosť fázy na frekvencii
- Závislosť koherencie na frekvencii

Závislosť odozvovej funkcie a fázy na frekvencii je zobrazená v spoločnom grafe na Obr. 27. Vykreslená funkcia odozvy zobrazuje v akej frekvencii nastali v danom bode najväčšie amplitúdy. Samotná zmena fázy bližšie určuje, kde nastal nárast amplitúdy. Graf priebehu tzv. koherencie v zaznamenanom frekvenčnom spektre udáva akúsi mieru linearity výsledku. Vyjadruje mieru presnosti nameraného signálu. Ideálny priebeh koherencie vyzerá tak, že zobrazená závislosť v celom meranom frekvenčnom rozsahu je na hodnote 1. Na Obr. 28 je možné vidieť, že vo vyšších hodnotách frekvencií bola miera koherencie čiastočne nestabilná.



Obr. 27 Priebeh odozvovej funkcie a fázy v bode 2 pre víko 12 mm



Obr. 28 Priebeh koherencie v bode 2 pre víko 12 mm

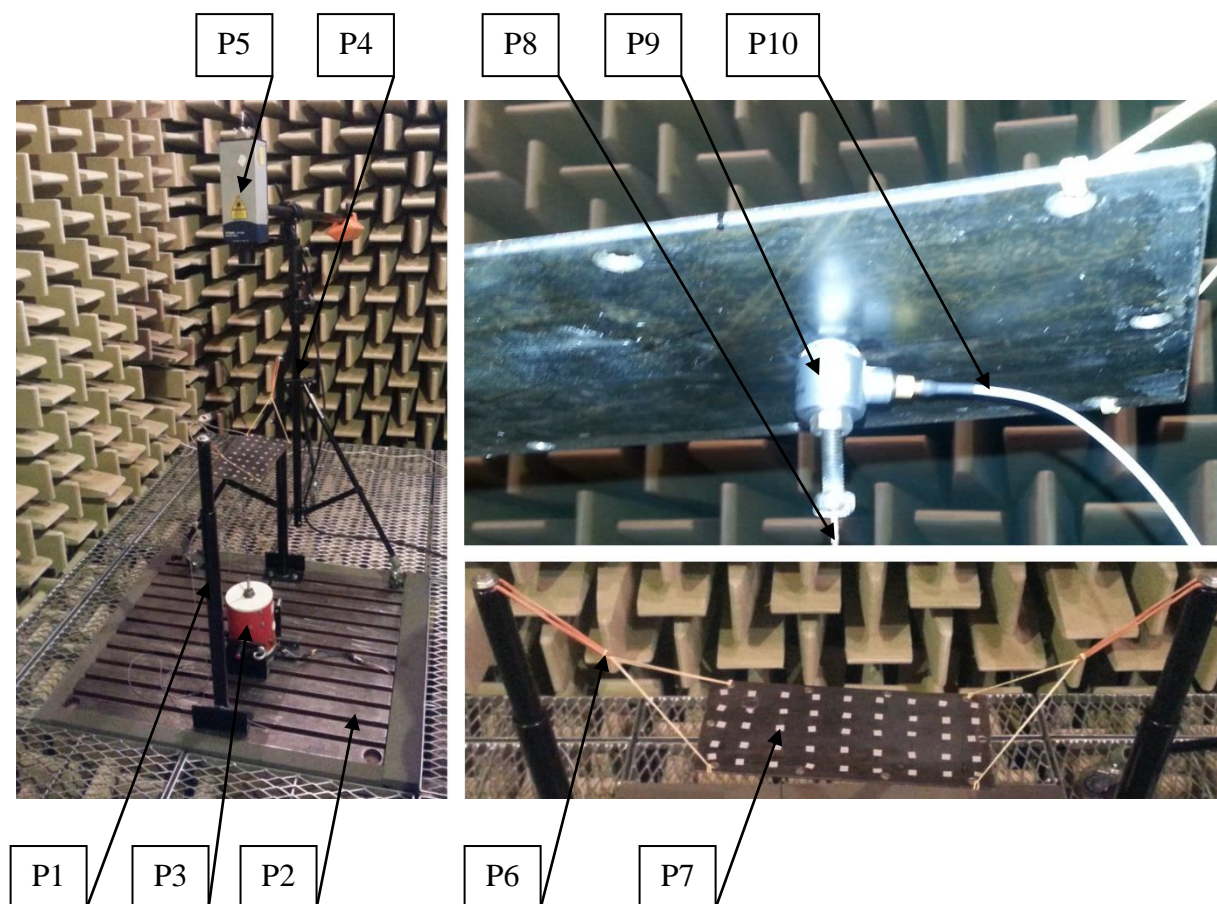
## 4.2 MODÁLNA ANALÝZA S POUŽITÍM BUDIČA VIBRÁCIÍ

Na stanovenie modálnych vlastností víka hrúbky 3 mm bol zvolený odlišný experimentálny prístup v porovnaní s variantom hrubšieho víka. Laboratórne meranie modálnych vlastností s využitím budiča vibrácií prebehlo v bezdozvukovej komore na UADI. Víko hrúbky 3 mm bolo zavesené gumičkami o nízkej tuhosti na železných vzperoch – realizácia voľného uloženia (viď detaily P1 a P6 na Obr. 29). Hlavné súčasti meracieho aparátu sú popísané v Tab. 7 podľa priradených pozícií z Obr. 29.

Tab. 7 Popis jednotlivých pozícií z Obr. 29

Označenie pozície na Obr. 29		Popis objektu
1	P1	Železné vzpery
2	P2	Lóža
3	P3	Budič vibrácií
4	P4	Laserový stojan
5	P5	Laserová hlava
6	P6	Uchytenie meraného objektu
7	P7	Bod uloženia snímača sily
8	P8	Budiaca tyčinka
9	P9	Snímač sily
10	P10	Prepojenie snímača sily s analyzátorom

Obdĺžniková doska bola v tomto prípade budená prostredníctvom budiča vibrácií, ktorý bol pevne uchytený k platforme (detail P3 na Obr. 29). Budičom vibrácií bol sprostredkovaný signál, generovaný prostredníctvom riadiaceho softwaru vytvoreného v programe MATLAB. Na štruktúru bol cez budiacu tyčinku (detail P8 na Obr. 29) prenášaný frekvenčný budiaci signál. V praktickom ponímaní to znamenalo, že štruktúra bola budená frekvenčným spektrom v rozmedzí od 0 do 3200 Hz. Z dôvodu zvýšenia intenzity budiaceho signálu bol do meracieho aparátu aplikovaný ešte výkonový zosilňovač. Meranie signálu odozvy bolo v tomto prípade uplatnené bezkontaktným spôsobom merania pomocou laserového vibrometru POLYTEC OFV 505/5000 (detail P4 a P5 na Obr. 29). To z dôvodu, že v prípade využitia snímača zrýchlenia by mohlo dôjsť ku výraznému skresleniu nameraných výsledkov. Hmotnosť snímača zrýchlenia by v takom prípade nebola zanedbateľná a z veľkou pravdepodobnosťou by tak došlo k modálnemu preladeniu štruktúry. Pred samotným meraním bolo potrebné v jednotlivých meracích bodoch nalepiť špeciálnu pásku (viď detail P7 na Obr. 29), ktorá slúžila ako odrazová plocha a využíva sa na bezkontaktný spôsob merania vibrácií. Na sprostredkovanie signálov podobne ako v prípade rázového budenia bol použitý rovnaký analyzátor, na ktorom boli zapojené tri kanály. Na jednom bol zaznamenávaný signál odozvy, v tomto prípade meraná normálová rýchlosť pomocou laserového vibrometra, na druhom kanáli bol zaznamenávaný vstupný signál sily pomocou snímača sily (viď detail P9 a P10 na Obr. 29) a tretím kanálom bol riadený modálny budič vibrácií ako sprostredkovateľ analógového signálu z analyzátora. Snímač sily bol z jednej strany uchytený lepidlom ku štruktúre a z druhej strany spojený cez skrutkový spoj k budiacej tyčinke (viď detaily P8 na Obr. 29). Snímač sily bol umiestnený v bode 13 podľa Obr. 25, na spodnej strane víka (detail P7 na Obr. 29).



Obr. 29 Fyzické zostavenie voľného uloženia víka hrúbky 3 mm so súčastami meracieho aparátu

### 4.3 VYHODNOCOVANIE MODÁLNYCH VLASTNOSTÍ

Z experimentálneho merania víka boli primárne vyhodnocované najmä odozvové funkcie. Na základe nameraných dát zo všetkých 44 bodov, bol zostavený spoločný graf prenosovej funkcie pre obe varianty hrúbky víka na Obr. 31 a Obr. 32, pre zvolené merané frekvenčné spektrum:

- Víko hrúbky 3 mm: 0 – 2200 Hz
- Víko hrúbky 12 mm: 0 – 5200 Hz

Z grafov je možné vidieť, v ktorých hodnotách frekvencií dochádzalo k nárastu prenosovej funkcie. Na grafoch sú číselne znázornené jednotlivé vlastné módy. V takto zaznamenaných nárastoch boli vyhodnocované vlastné modálne tvary a hodnoty vlastných frekvencií. Vďaka získaným výsledkom z numerickej simulácie boli vzájomným porovnávaním hľadané jednotlivé vlastné tvary a k nim prislúchajúce vlastné frekvencie namerané z experimentu. Na Obr. 32 v miestach vyznačených červenými šípkami je vidieť, že v meranom frekvenčnom spektre boli vybudené vlastné frekvencie niektorých častí meracieho aparátu. Z najväčšou pravdepodobnosťou sa mohlo jednať o niektoré vlastné frekvencie buďto budiacej tyčinky alebo poprípade časti modálneho budiča vibrácií.



Konečné výsledky a vzájomné porovnania z numerickej výpočtovej analýzy a experimentu pre obe varianty hrúbky víka sú zobrazené v Tab. 8 až Tab. 14. V tabuľkách sú zahrnuté percentuálne rozdiely frekvencií pre jednotlivé vlastné módy. Vo väčšine porovnaných je možné vidieť minimálne percentuálne rozdiely, ktoré len v niektorých prípadoch prekračujú hranicu 2 %. Markantnejší počet percentuálnych výchyľiek vo frekvenciách nastával pri variante hrúbky víka 3 mm, ktoré bolo budené modálnym budičom vibrácií. Z veľkou pravdepodobnosťou to bolo spôsobené práve kvôli minimálnej hrúbke plechu, z ktorého bolo víko vyrobené. Práve pri takýchto tenkých typoch dosiek je relatívne zložité zaručiť minimálne rozdiely v celom meranom frekvenčnom spektre (0 – 2200 Hz).

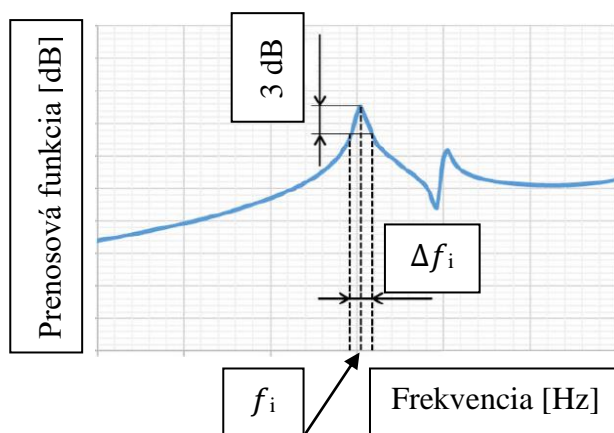
V Tab. 10, Tab. 12 a Tab. 14 je vidieť, že experimentálnou modálnou analýzou neboli zaznamenané všetky vlastné tvary súčastí. V prvom prípade sa jedná o víko hrúbky 12 mm, konkrétne o jeho 11. vlastný tvar. Z numerickej simulácie je vidieť, že súčasť je ohýbaná okolo osi kolmej na samotný povrch dosky. Tento vlastný tvar však rázovým kladivkom nebolo možné vybudit'. Ďalším príkladom nevybudenej vlastného tvaru je 6. a 16. mód víka hrúbky 3 mm. V týchto prípadoch zrejme zohrával významnú úlohu fakt, že štruktúra bola budená v uzlovom bode a teda nebolo možné vybudit' štruktúru v takomto tvare.

Z experimentálnej modálnej analýzy boli ďalej vyhodnocované hodnoty pomerného tlmenia oboch meraných štruktúr. K jednotlivým experimentálne stanoveným vlastným frekvenciám boli vyjadrené percentuálne hodnoty pomerného tlmenia v Tab. 15 pomocou metódy postranných frekvencií pre systém s viac stupňami voľnosti [18]. Pre každý konkrétny mód bolo podľa [17] vyjadrené pomerné tlmenie:

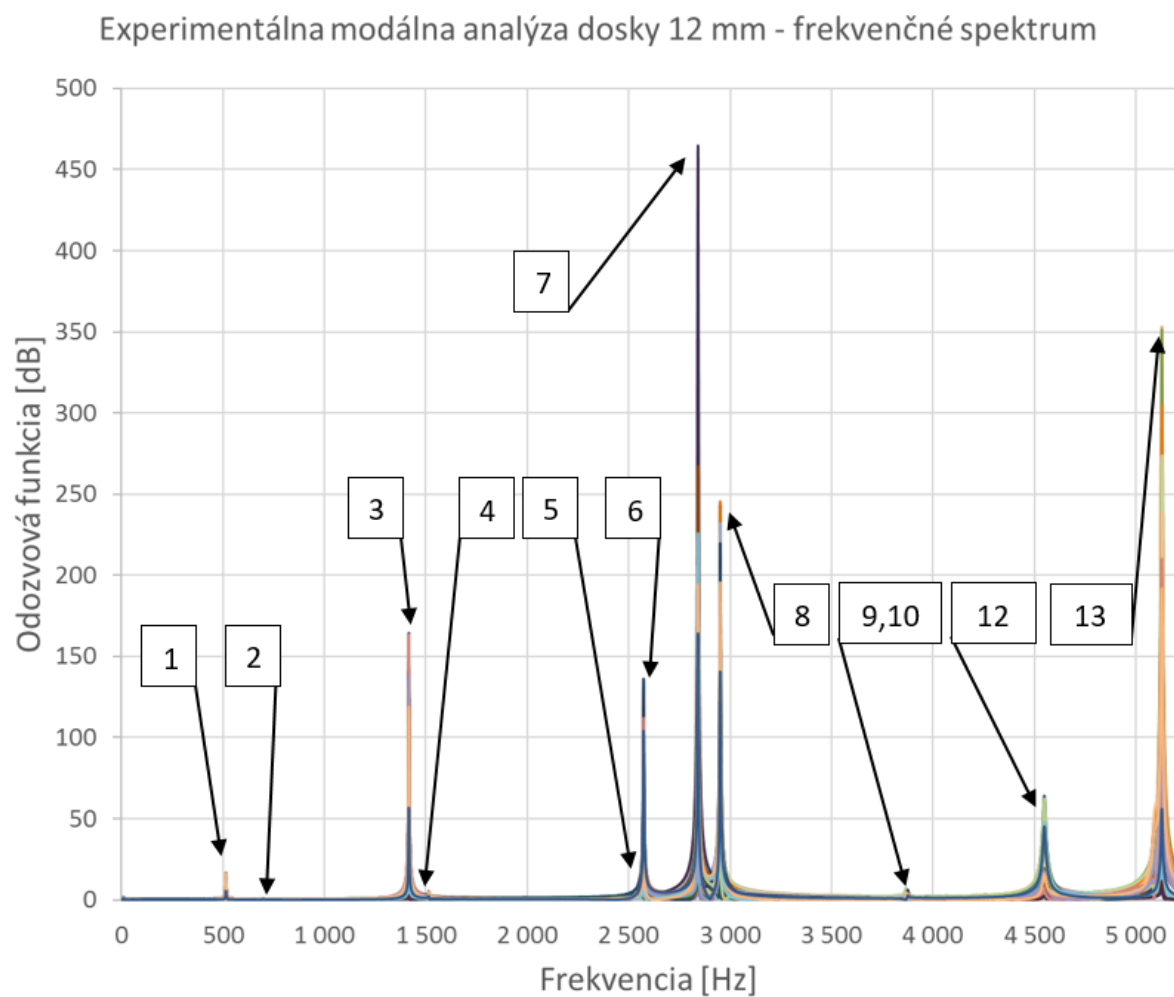
$$\xi_i = \frac{\Delta f_i}{2f_i} [-], \quad (25)$$

kde  $\Delta f_i$  [Hz] je frekvenčná šírka pásma pre  $i$ -ty mód, v ktorom klesne funkčná hodnota prenosovej funkcie z maximálnej hodnoty o 3 [dB] v prípade, že je zvislá osa vyjadrená v decibeloch (viď znázornené na Obr. 30 ),

$f_i$  [Hz] je vlastná frekvencia (frekvencia rezonancie)  $i$ -teho módu.

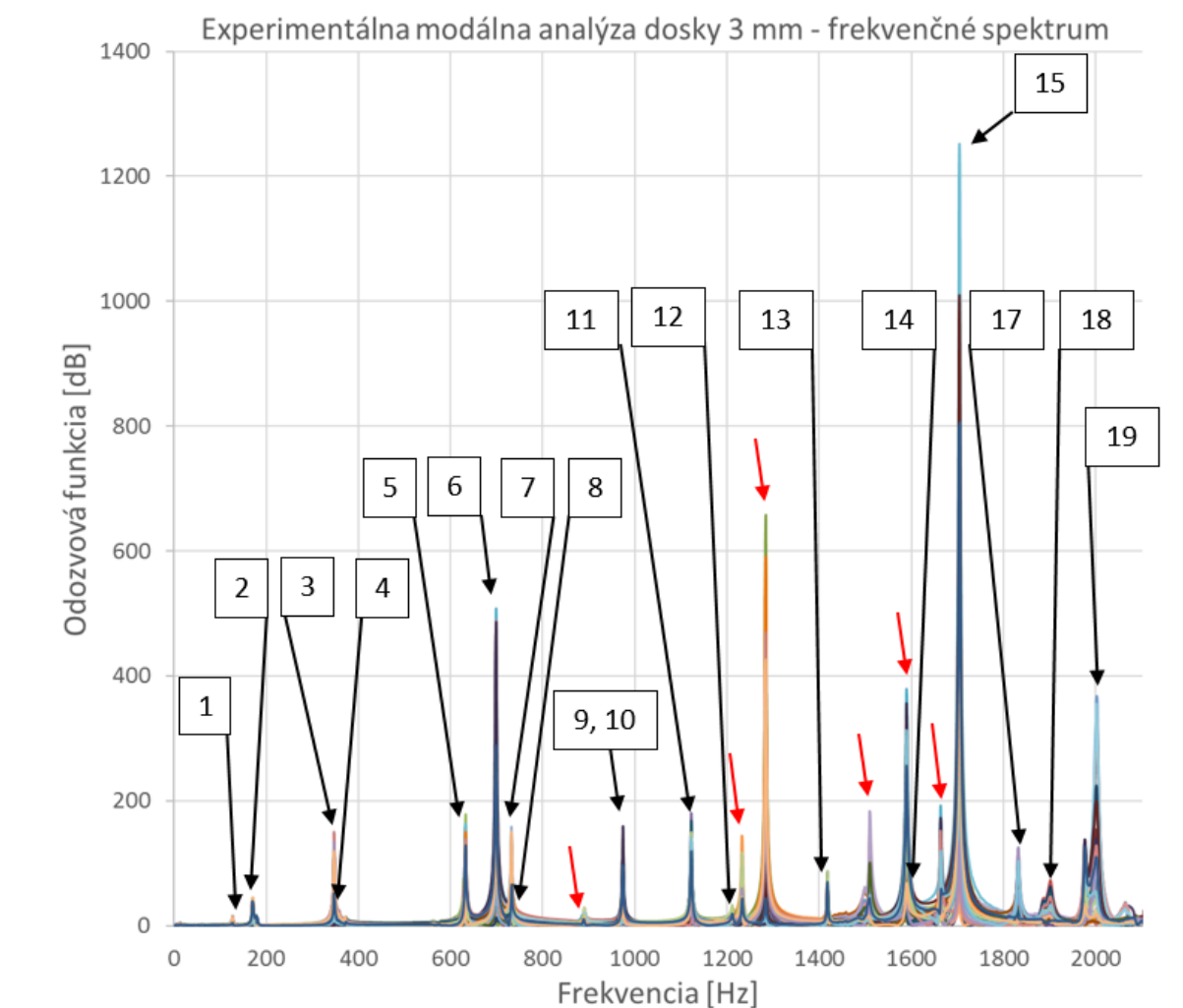


Obr. 30 Stanovenie pomerného tlmenia metódou postranných frekvencií [14]



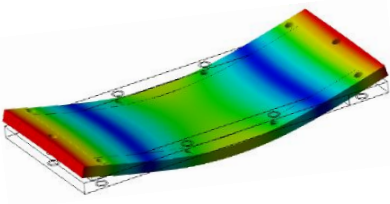
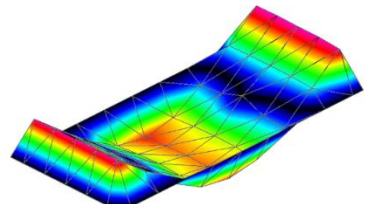
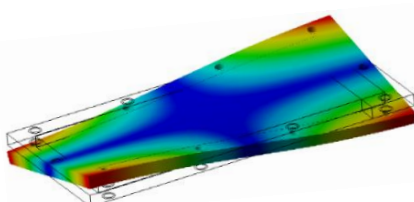
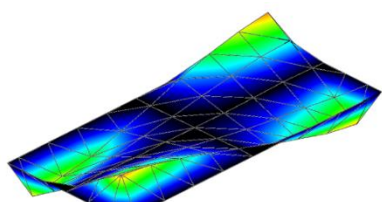
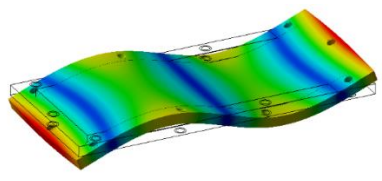
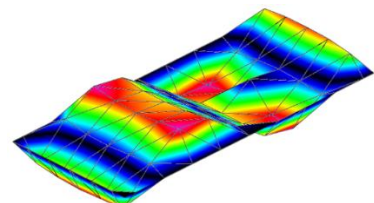
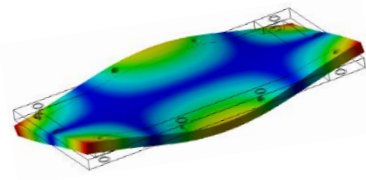
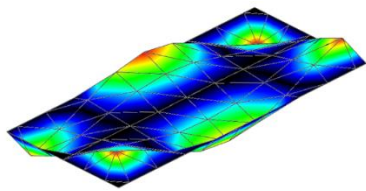
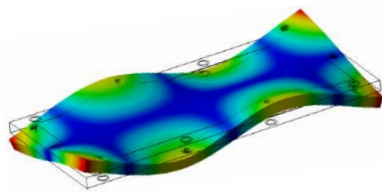
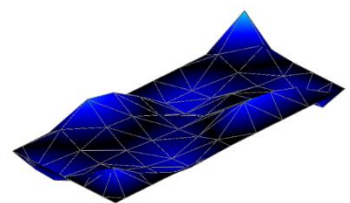
Obr. 31 Graf závislosti prenosovej funkcie na frekvencií pre víko hrúbky 12 mm



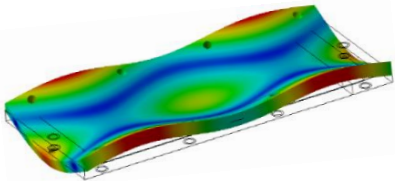
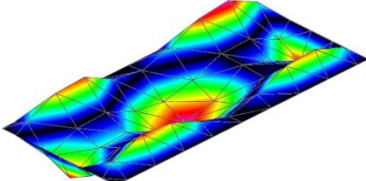
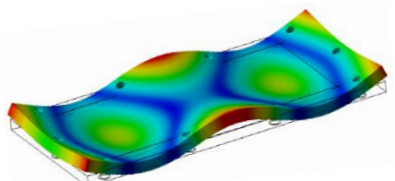
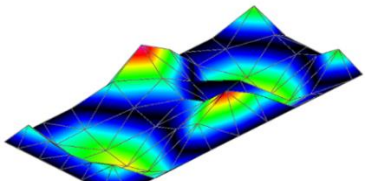
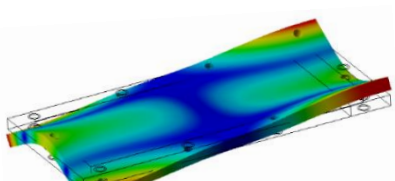
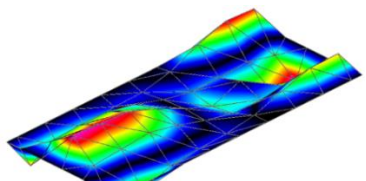
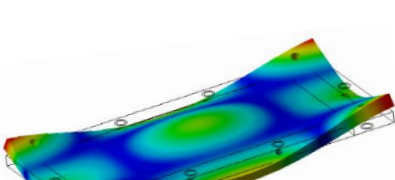
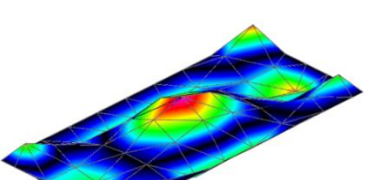
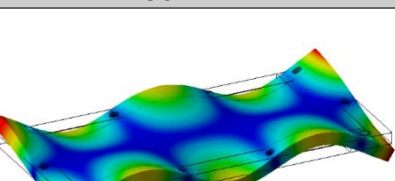
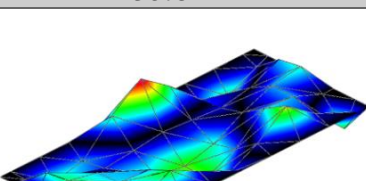


Obr. 32 Graf závislosti prenosovej funkcie na frekvencii pre viko hrúbky 3 mm

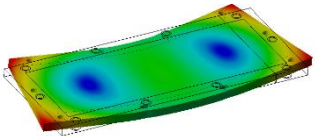
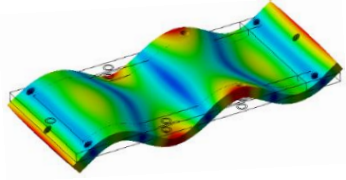
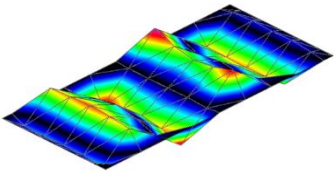
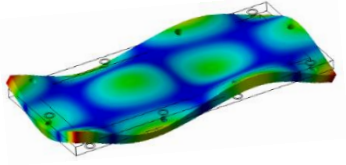
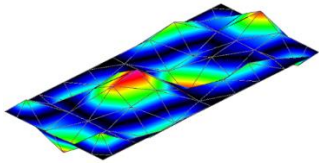
Tab. 8 Porovnanie výsledkov pre hrúbku vika 12 mm, časť 1

Mód	Numerická simulácia	Experiment	Rozdiel [%]
1	514 Hz	515 Hz	0,1
			
2	689 Hz	698 Hz	1,3
			
3	1414 Hz	1416 Hz	0,2
			
4	1486 Hz	1515 Hz	1,9
			
5	2502 Hz	2542 Hz	1,6
			

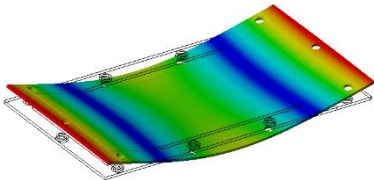
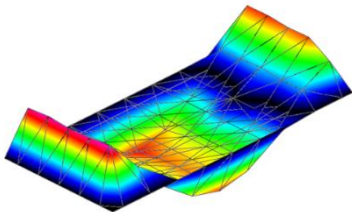
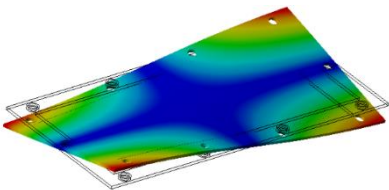
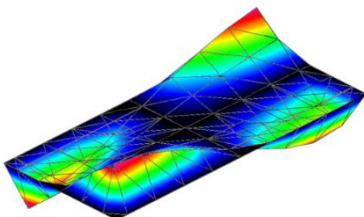
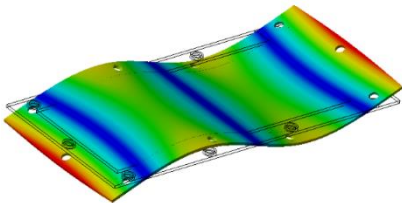
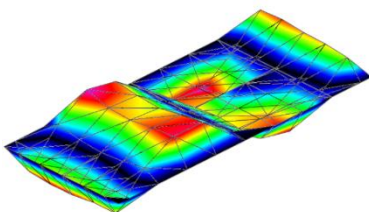
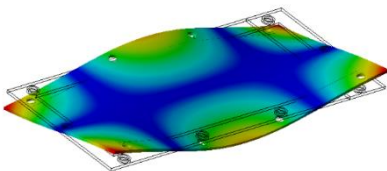
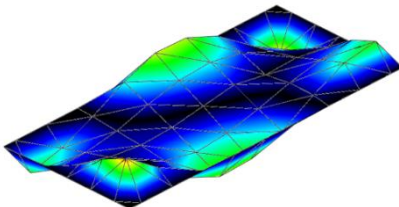
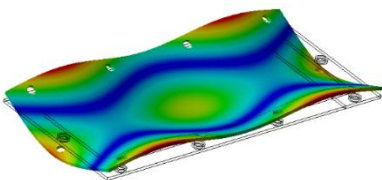
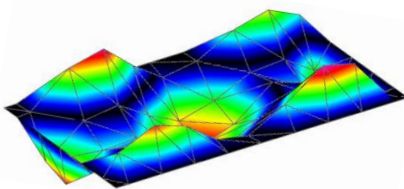
Tab. 9 Porovnanie výsledkov pre hrúbku vika 12 mm, časť 2

Mód	Numerická simulácia	Experiment	Rozdiel [%]
6	2516 Hz	2573 Hz	2,2
			
7	2836 Hz	2841 Hz	0,2
			
8	2886 Hz	2951 Hz	2,2
			
9	3795 Hz	3870 Hz	1,9
			
10	3822 Hz	3875 Hz	1,4
			

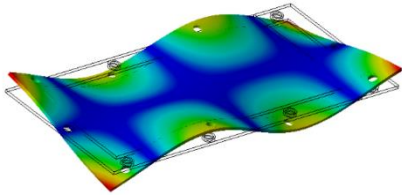
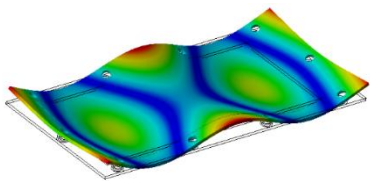
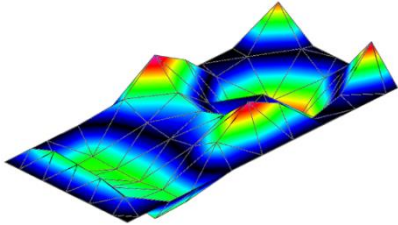
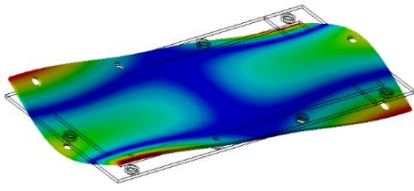
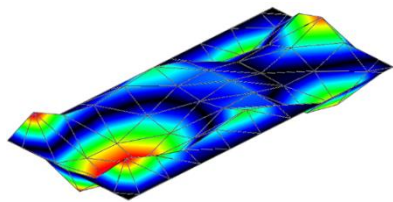
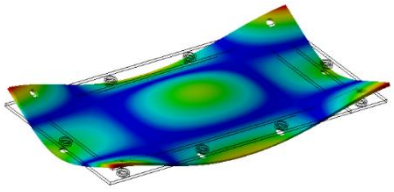
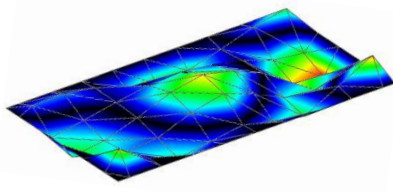
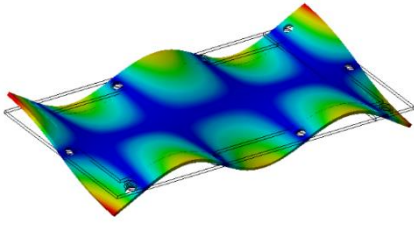
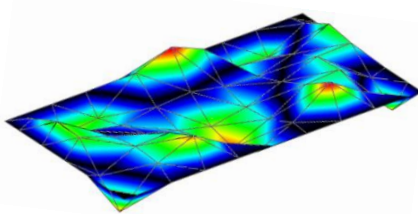
Tab. 10 Porovnanie výsledkov pre hrúbku víka 12 mm, časť 3

Mód	Numerická simulácia	Experiment	Rozdiel [%]
11	4462 Hz	-	-
			
12	4524 Hz	4548 Hz	0,5
			
13	5061 Hz	5128 Hz	1,3
			

Tab. 11 Porovnanie výsledkov pre hrúbku vika 3 mm, časť 1

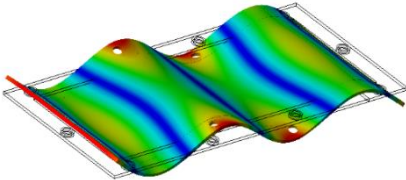
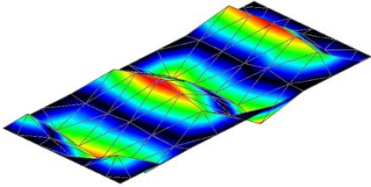
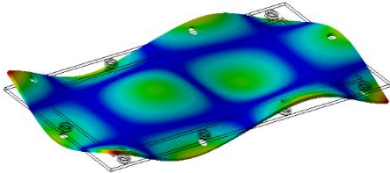
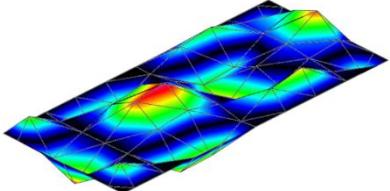
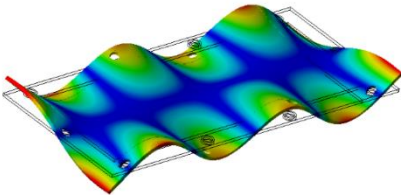
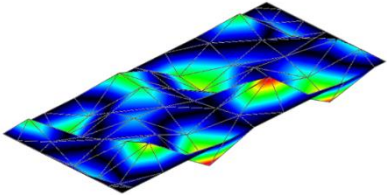
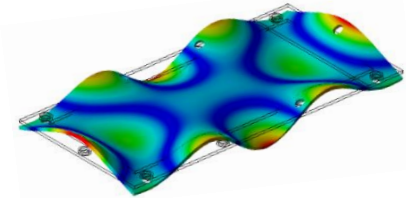
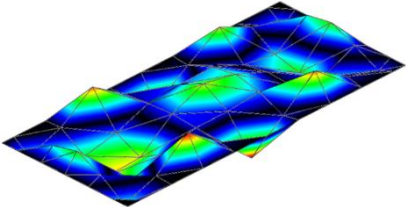
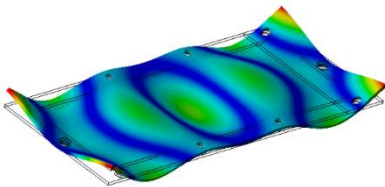
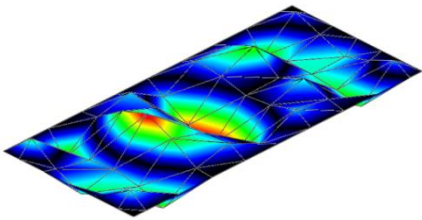
Mód	Numerická simulácia	Experiment	Rozdiel [%]
1	126 Hz	127 Hz	0,8
			
2	172 Hz	172 Hz	0
			
3	350 Hz	348 Hz	-0,6
			
4	373 Hz	373 Hz	0
			
5	627 Hz	634 Hz	-1,1
			

Tab. 12 Porovnanie výsledkov pre hrúbku vika 3 mm, časť 2

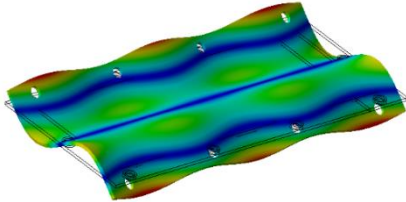
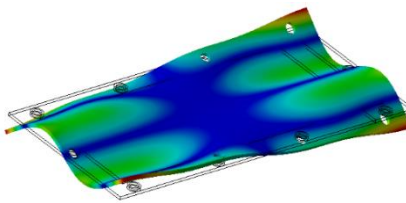
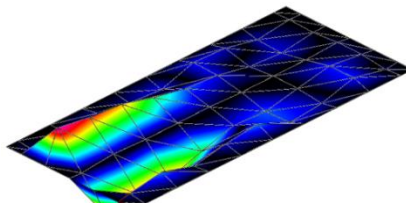
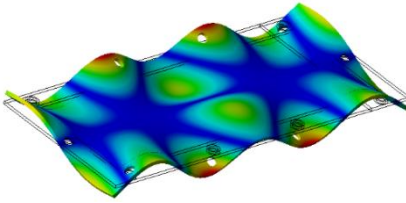
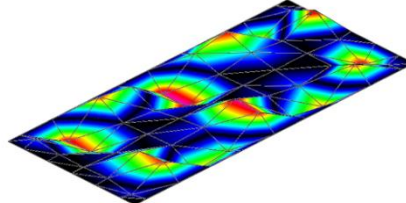
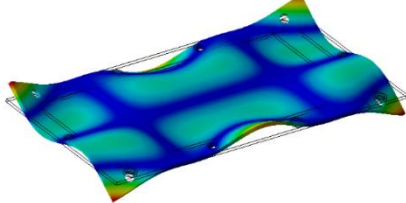
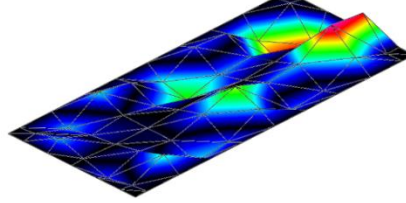
Mód	Numerická simulácia	Experiment	Rozdiel [%]
6	633 Hz	-	-
			
7	709 Hz	698 Hz	-1,6
			
8	726 Hz	732 Hz	0,8
			
9	968 Hz	965 Hz	-0,3
			
10	977 Hz	973 Hz	-0,4
			



Tab. 13 Porovnanie výsledkov pre hrúbku vika 3 mm, časť 3

Mód	Numerická simulácia	Experiment	Rozdiel [%]
11	1148 Hz	1129 Hz	-1,7
			
12	1307 Hz	1280 Hz	-2,1
			
13	1418 Hz	1415 Hz	-0,2
			
14	1686 Hz	1662 Hz	-1,4
			
15	1732 Hz	1706 Hz	-1,5
			

Tab. 14 Porovnanie výsledkov pre hrúbku vika 3 mm, časť 4

Mód	Numerická simulácia	Experiment	Rozdiel [%]
16	1759 Hz	-	-
			
17	1846 Hz	1832 Hz	-0,8
			
18	1974 Hz	1976 Hz	0,1
			
19	2084 Hz	2002 Hz	-4,1
			



Tab. 15 Hodnoty pomerného tlmenia  $\xi$  oboch variant hrúbky víka

Hodnoty pomerného tlmenia $\xi_i$ [%]				
Mód	Víko hrúbky 3 [mm]		Víko hrúbky 12 [mm]	
	$f_{1i}$ [Hz]	$\xi_{1i}$ [%]	$f_{2i}$ [Hz]	$\xi_{2i}$ [%]
1	127	0,585	515	0,261
2	172	0,891	698	0,245
3	348	0,417	1416	0,095
4	373	0,346	1515	0,084
5	634	0,202	2542	0,076
6	-	-	2575	0,068
7	698	0,253	2841	0,072
8	732	0,192	2951	0,067
9	965	0,150	3870	0,128
10	973	0,112	3875	0,111
11	1129	0,128	-	-
12	1280	0,118	4548	0,175
13	1415	0,069	5128	0,075
14	1662	0,103	-	-
15	1706	0,109	-	-
16	-	-	-	-
17	1832	0,133	-	-
18	1976	0,142	-	-
19	2002	0,214	-	-

## 5 HARMONICKÁ ANALÝZA OBDĹŽNIKOVEJ DOSKY

Harmonická analýza je vo všeobecnom vnímaní prirodzeným pokračovaním modálnej analýzy. Je označovaná za vyššiu úroveň výpočtového prístupu z hľadiska frekvenčnej oblasti riešeného štruktúrneho alebo akustického problému po hranicu 3 kHz [19]. V porovnaní s modálnou analýzou je harmonická analýza rozdielna v zápise pohybovej rovnice podľa [18]:

$$\mathbf{M}_s \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}_s \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_s \mathbf{q} = \mathbf{F} \quad , \quad (26)$$

kde  $\mathbf{B}_s$  [N.s.m<sup>-1</sup>] je matica tlmenia sústavy,

$\dot{\mathbf{q}}$  [m.s<sup>-1</sup>] je vektor rýchlosti,

$\mathbf{F}$  [N] je vektor zaťaženia.

Harmonická analýza je charakteristická konkrétne stanoveným zaťažením (silou v presne určenom smere), vyvolaným konkrétnym harmonickým signálom. Týmto druhom analýzy sú vyšetrované odozvy systému vzhľadom na zaťažujúci harmonický signál. Výhradne sú vyjadrované amplitúdy (výchylka, rýchlosť, zrýchlenie) vo frekvenčnej doméne – tvorenie amplitúdo-frekvenčnej charakteristiky v hľadanom mieste súčasti.

### 5.1 EXPERIMENTÁLNA HARMONICKÁ ANALÝZA

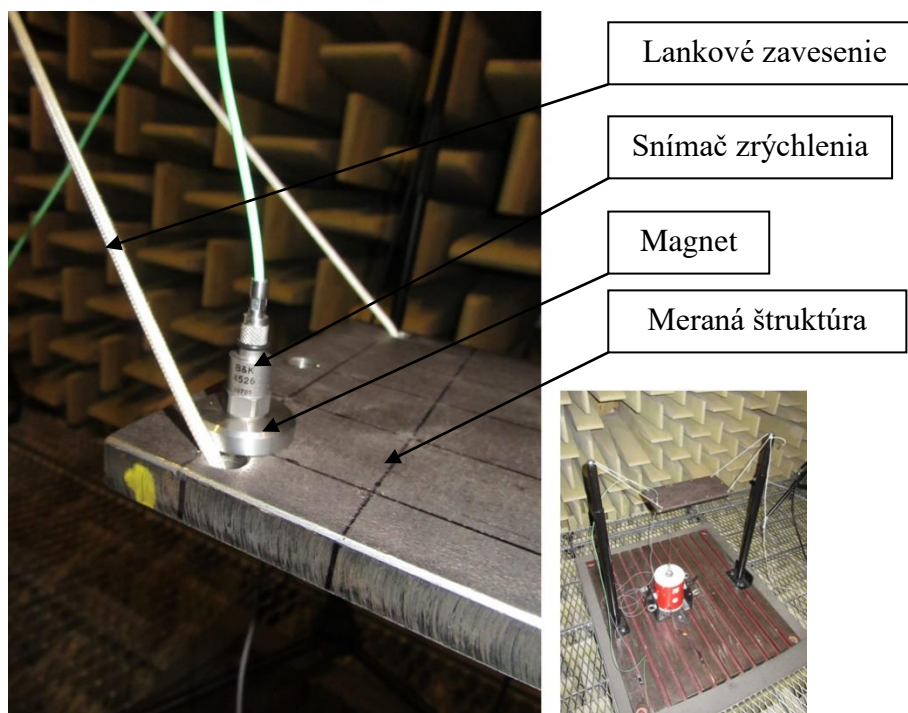
Na základe získaných výsledkov z experimentu modálnej analýzy bola následne vykonaná harmonická analýza oboch variant dosiek pre vybrané vlastné módy uvedené v Tab. 16.

Tab. 16 Vybrané módy na riešenie harmonickej analýzy

Mód	Víko hrúbky 3 mm	Víko hrúbky 12 mm
1	127 Hz	515 Hz
3	348 Hz	-
5	634 Hz	-
11	1129 Hz	-

Nastavenie experimentu vynúteného kmitania s harmonickým budením bolo podobné ako v prípade experimentálnej modálnej analýzy víka hrúbky 3 mm. Rozdielom oproti tenšej variante bola realizácia voľného uloženia a meranie signálu odozvy (vid' Obr. 33). Z dôvodu väčšej hmotnosti súčasti (víko hrúbky 12 mm) bolo zavesenie sprostredkované lankami s dostatočnou tuhosťou. Na kontaktné meranie odozvy bol v tomto prípade použitý snímač zrýchlenia pripevnený magnetom ku meranej štruktúre. Magnetové spojenie zároveň uľahčovalo manipuláciu so snímačom.

Cez modálny budič vibrácií bol sprostredkovaný harmonický signál. Aj v tomto prípade bol využitý riadiaci software z programu MATLAB, v ktorom bol generovaný harmonický budiaci signál. V riadiacom programe boli nastavované konkrétne hodnoty vlastných frekvencií (vid' podľa Tab. 16.) s možnosťou zadania veľkosti amplitúdy generovaného signálu.



Obr. 33 Fyzické zostavenie meracieho reťazca pre harmonickú analýzu víka hrúbky 12 mm

Z experimentov jednotlivých harmonických analýz boli zaznamenávané vo všetkých 44 meracích bodoch zostavených podľa Obr. 25 uvedené signály:

- Vstupný budiaci signál – hodnoty sily
- Výstupný signál odozvy
  - normálová rýchlosť s použitím laserového vibrometra pre variantu hrúbky víka 3 mm
  - zrýchlenie s použitím snímača zrýchlenia pre variantu hrúbky víka 12 mm

Získané experimentálne dáta boli následne vyhodnocované v programe MICROSOFT EXCEL. Zo získaných dát normálovej rýchlosti boli vytvorené amplitúdo – frekvenčné charakteristiky skúmaných vlastných módov. V grafoch sú zobrazené závislosti dvoch bodov, pričom v jednom nastal maximálny a v druhom minimálny nárast amplitúdy vo frekvenčnom spektre od 0 do 1200 Hz. Maximum amplitúdy je vykresľované červenou a minimum amplitúdy modrou farbou v Obr. 34, Obr. 35, Obr. 36, Obr. 37 a Obr. 38. Zo zaznamenaných dát vstupného signálu – budiacej sily, boli vybrané maximálne namerané hodnoty z okolia najväčšieho nárastu amplitúdy v konkrétne skúmanej hodnote vlastnej frekvencie. Zo 44 maximálnych hodnôt silového zaťaženia bol vyjadrený priemer a ten bol zaznamenaný v Tab. 17. Sú to tzv. efektívne hodnoty, z ktorých boli stanovené konečné silové zaťaženia, vstupujúce do výpočtových simulácií. Prepočet z efektívnej hodnoty sily na maximálnu bol vyjadrený podľa [20]:

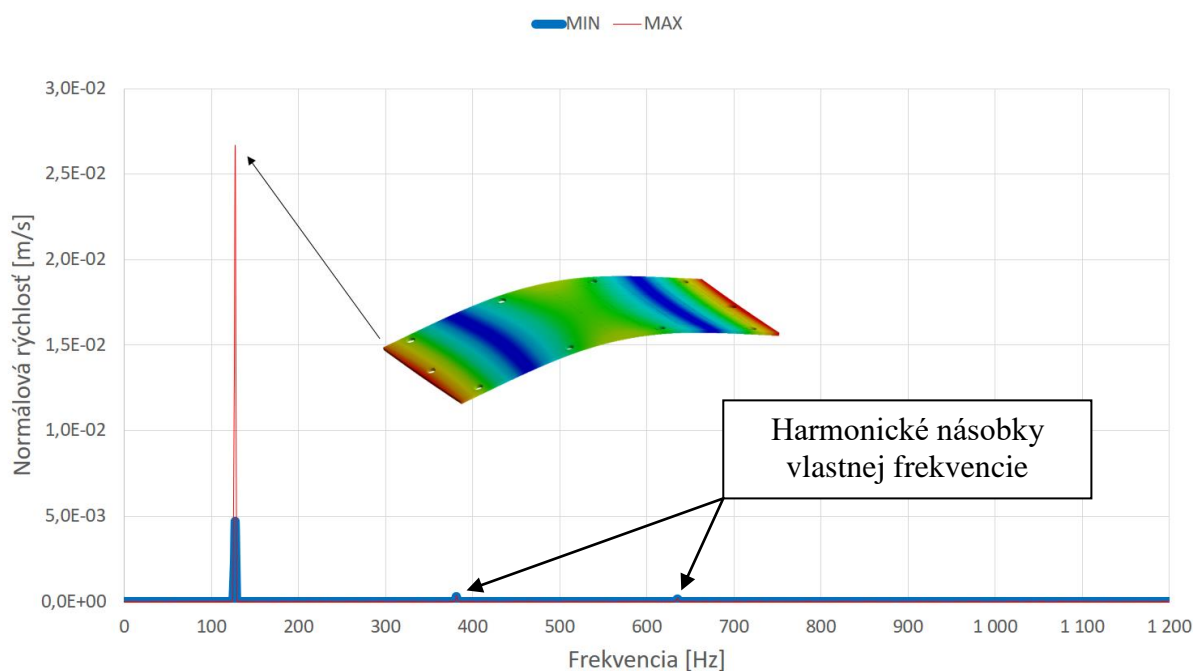
$$F_{ef} = \frac{F_{max}}{\sqrt{2}} \quad [N], \quad (27)$$

kde  $F_{max}$  [N] je maximálna hodnota sily.

Tab. 17 Hodnoty silových zaťažení získaných experimentom

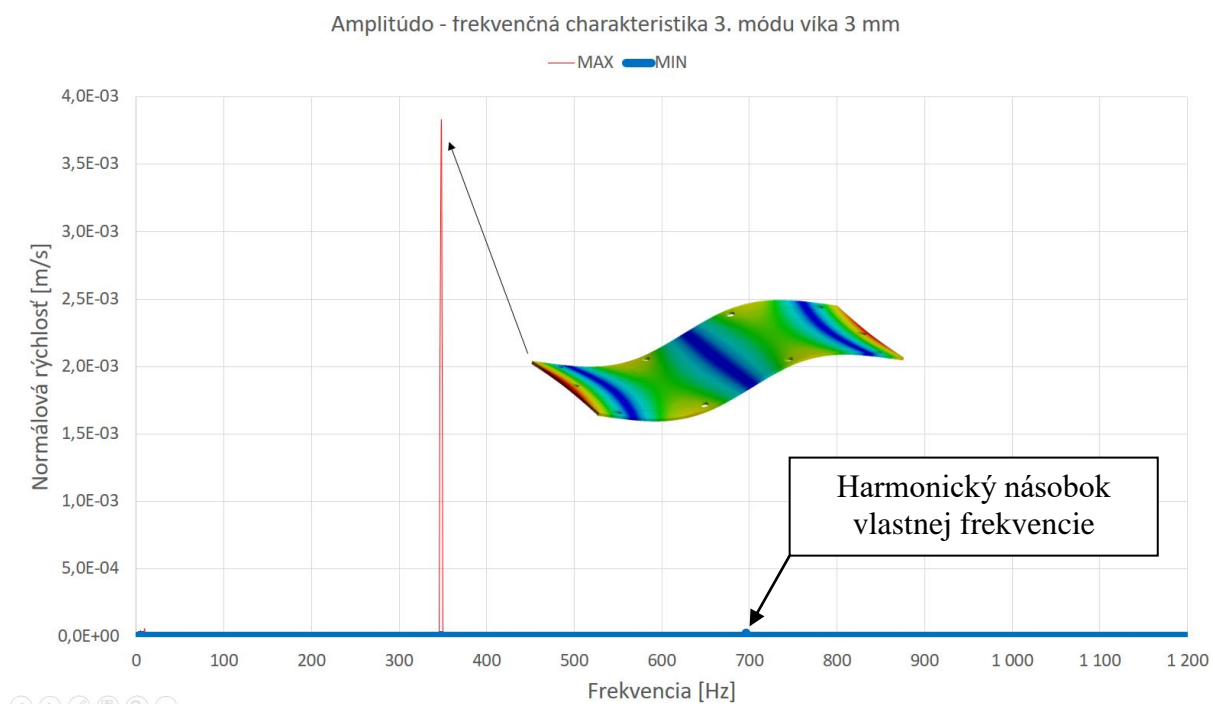
Mód	Víko hrúbky 3 mm		Víko hrúbky 12 mm	
	$F_{ef1}$ [N]	$F_{max1}$ [N]	$F_{ef2}$ [N]	$F_{max2}$ [N]
<b>1</b>	0,2691	0,3806	1,1081	1,5673
<b>3</b>	0,0528	0,0747	-	-
<b>5</b>	0,0917	0,1297	-	-
<b>11</b>	0,1312	0,1856	-	-

Amplitúdo - frekvenčná charakteristika 1. módu víka 3 mm

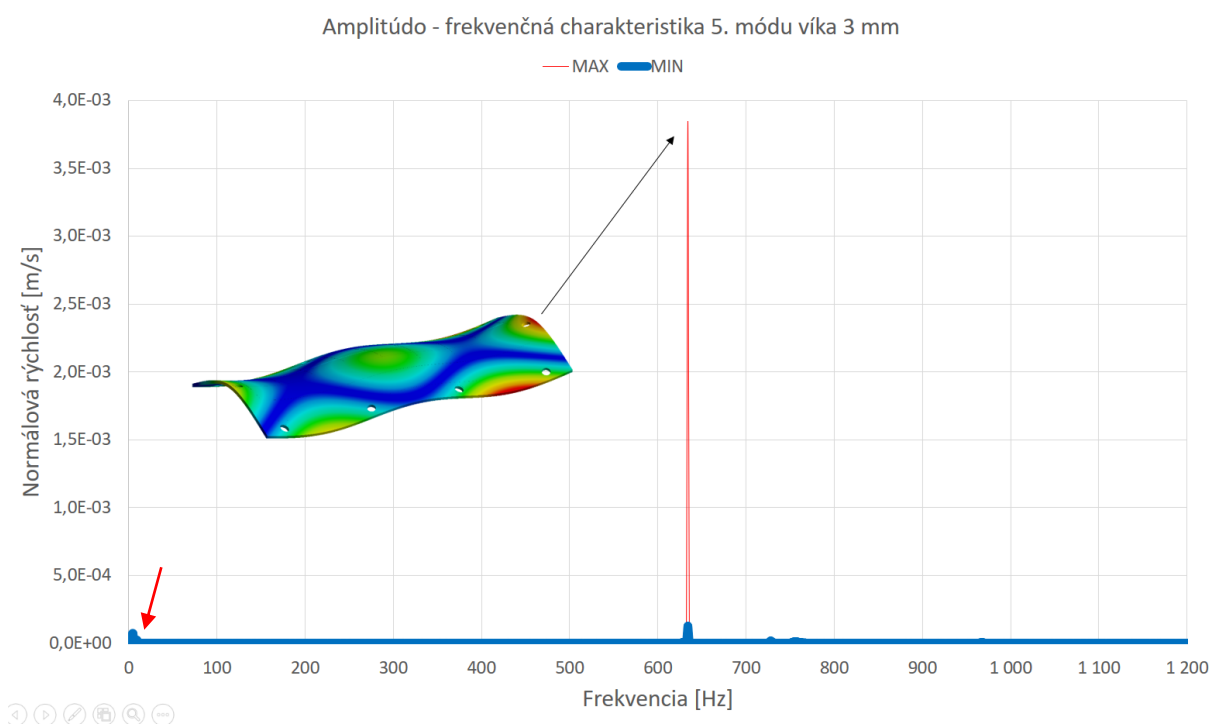


Obr. 34 Amplitúdo – frekvenčná charakteristika č.1

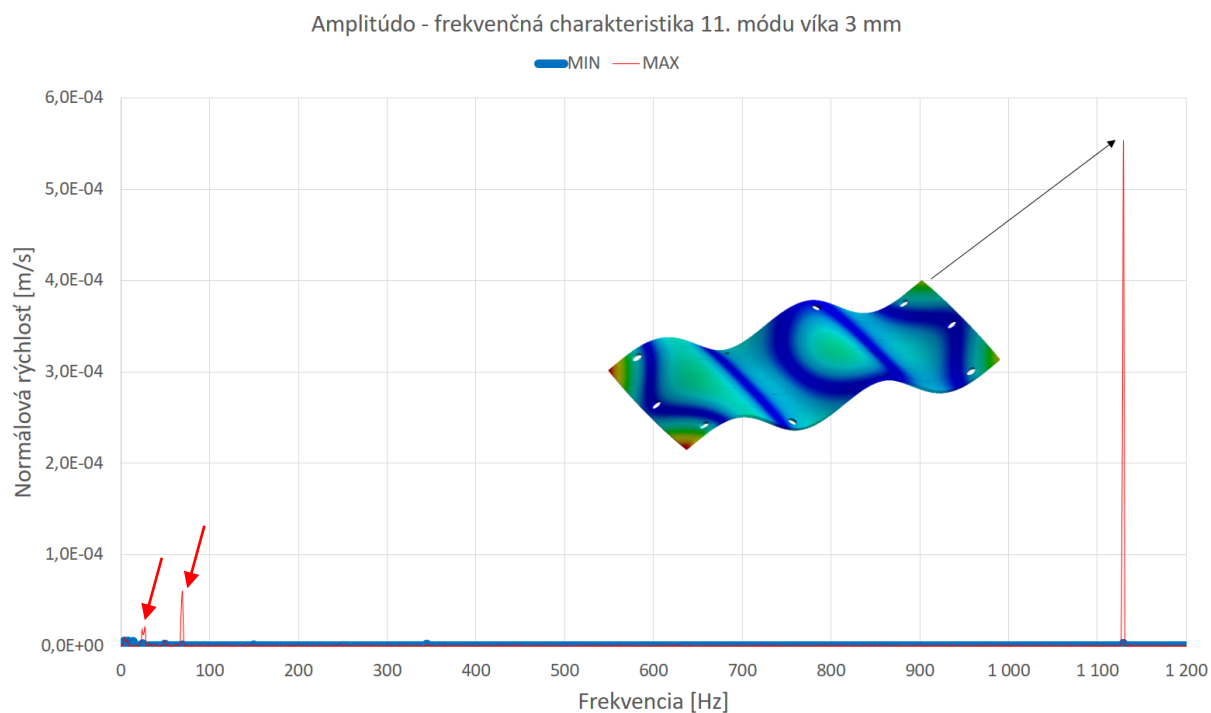
Z vykreslených závislostí je možné vyčítať maximálne amplitúdy normálovej rýchlosti namerané experimentom. Najväčšie nárasty odozvy nastali podľa očakávania vo vyšetrovaných vlastných tvaroch. Z vynesenej závislosti minimálnych (modrá farba v grafoch) a maximálnych (červená farba v grafoch) amplitúd je možné vidieť, v akom rozsahu hodnôt normálovej rýchlosti skúmané štruktúry kmitali. Na Obr. 34 a Obr. 35 je však možné pozorovať drobné nárasty amplitúd mimo dominantnej zložky. Sú to tzv. násobky dominantnej vlastnej frekvencie vybudené harmonickým signálom. V grafoch je taktiež možné pozorovať, že v rozmedzí frekvenčného rozsahu od 0 do 100 Hz boli zaznamenané ďalšie nárasty amplitúd označené červenými šípkami na Obr. 36, Obr. 37 a Obr. 38. Z najväčšou pravdepodobnosťou boli tieto odozvy v nízkych frekvenciách zapríčinené vstupujúcimi vlastnými módmi častí meracieho aparátu (budiaca tyčinka, poprípade jadro modálneho budiča vibrácií). Rozsah frekvenčného spektra od 0 – 1200 Hz pri experimentálnej harmonickej analýze bol zvolený najmä z dôvodu limitujúcich vlastností modálneho budiča. Pri budení vo frekvenčnom rozsahu vyšom ako 1000 Hz vykazoval nestálosť amplitúdy budiacej sily. Tento limitujúci faktor spôsobil to, že pri vynútenom budení víka hrúbky 12 mm bolo možné vyhodnocovať nárasty amplitúdy len prvého vlastného tvaru.



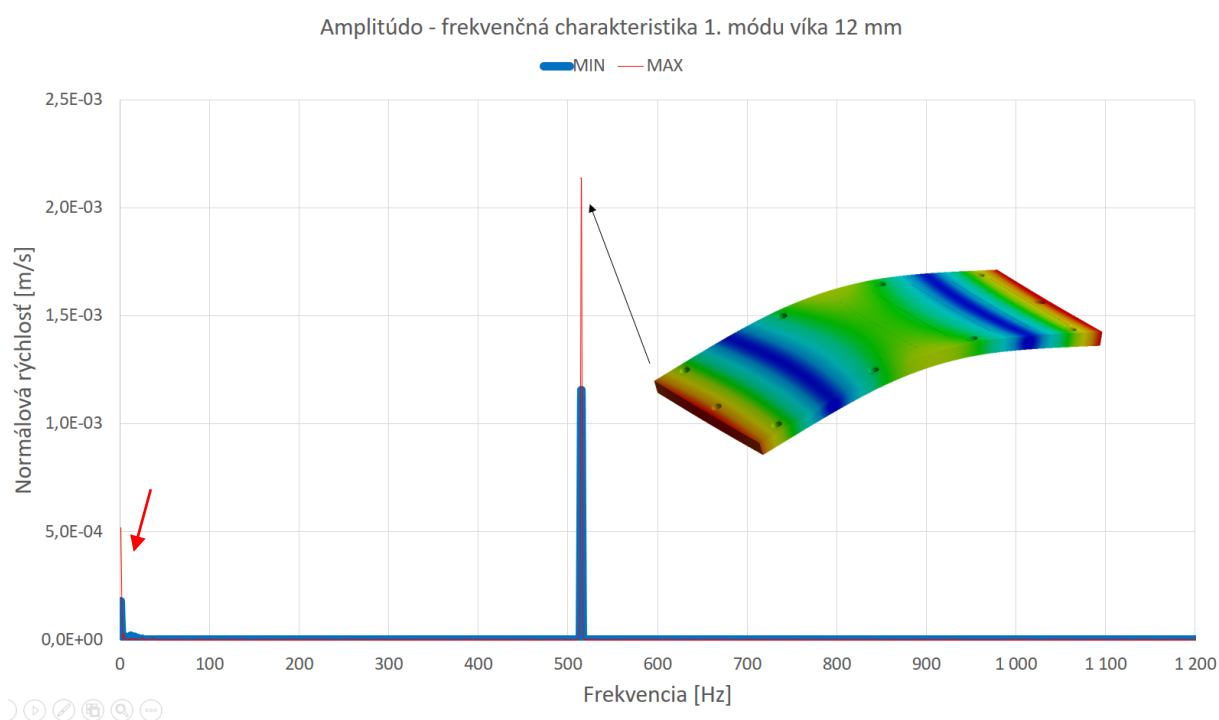
Obr. 35 Amplitúdo – frekvenčná charakteristika č.2



Obr. 36 Amplitúdo – frekvenčná charakteristika č.3



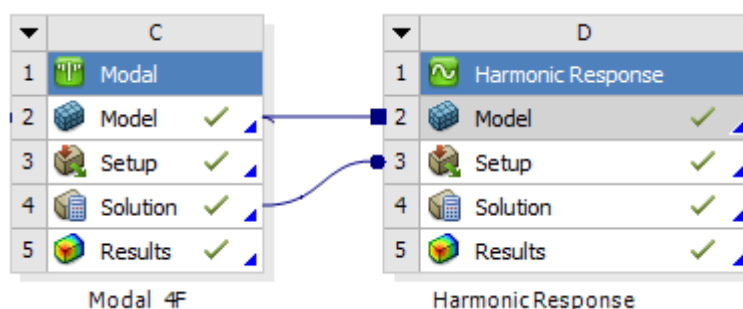
Obr. 37 Amplitúdo – frekvenčná charakteristika č.4



Obr. 38 Amplitúdo – frekvenčná charakteristika č.5

## 5.2 NUMERICKÝ VÝPOČET HARMONICKEJ ANALÝZY

Na základe experimentu vynúteného kmitania s harmonickým signálom bola zostavená numerická simulácia. Výpočet bol uskutočnený v systémovom prostredí WORKBENCH. K numerickej simulácii modálnej analýzy bola zostavená harmonická analýza prostredníctvom výberu okna „Harmonic response“ (viď Obr. 39).

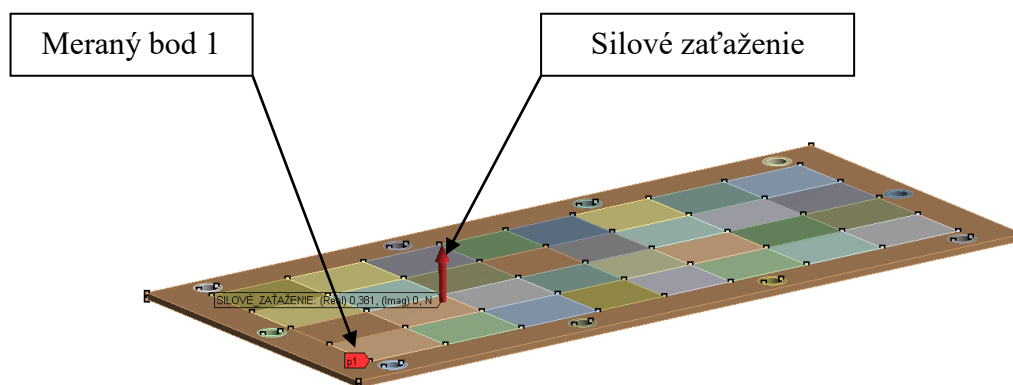


Obr. 39 Zjednotenie modálnej a harmonickej analýzy vo výpočtovom prostredí WORKBENCH

### Nastavenie výpočtu harmonickej analýzy:

- Zavedenie silového zaťaženia z Tab. 17 do konkrétneho bodu (viď Obr. 40) na základe experimentu.
- Zadanie pomerného tlmenia z Tab. 15.
- Nastavenie frekvenčného rozsahu v okolí vlastnej frekvencie (10 Hz pred a 10 Hz za hodnotou numericky vypočítanej vlastnej frekvencie).
- Okrajové podmienky neboli obzvlášť nastavované – simulácia voľného uloženia.
- Zadanie meracích bodov v CAD modeli podľa Obr. 25.
- Nastavenie výpočtu amplitúdy normálovej rýchlosti vzhľadom na frekvenciu v 44 zadanych bodoch.

Výpočtový model harmonickej analýzy so zavedeným silovým zaťažením a meraným bodom je znázornený na Obr. 40.

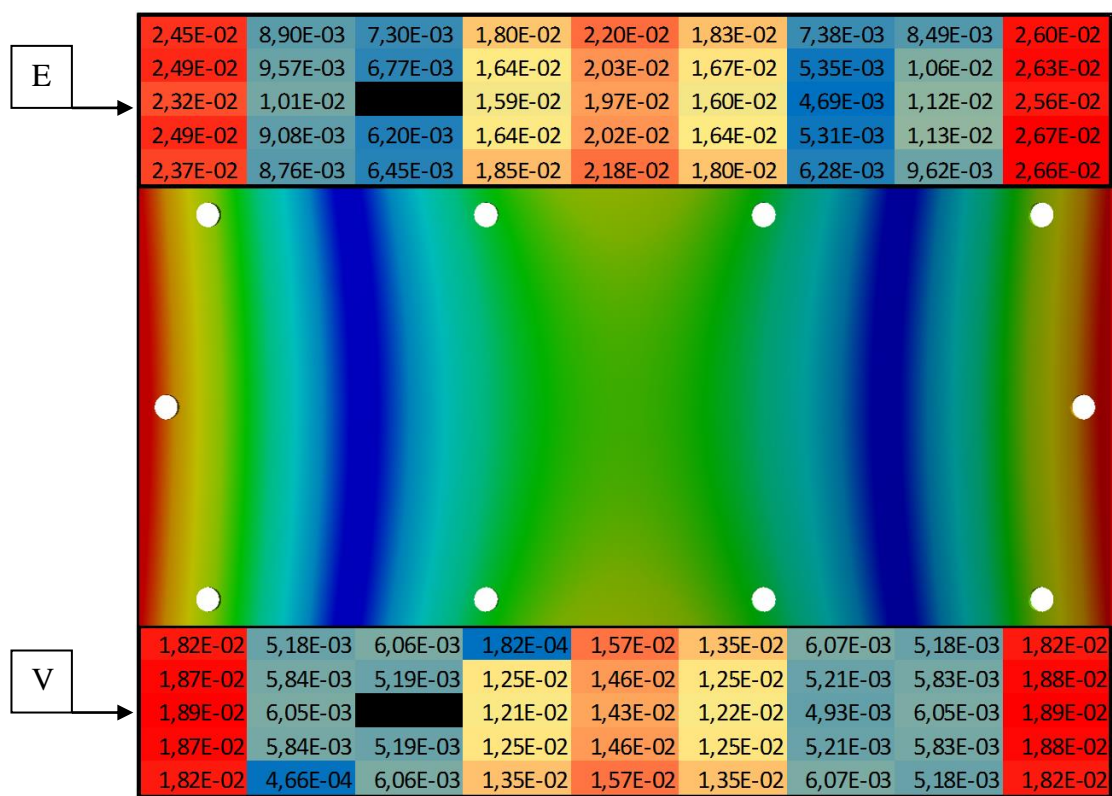


Obr. 40 Zavedenie silového zaťaženia a meraného bodu vo výpočtovom modeli

### 5.3 VÝSLEDKY HARMONICKEJ ANALÝZY

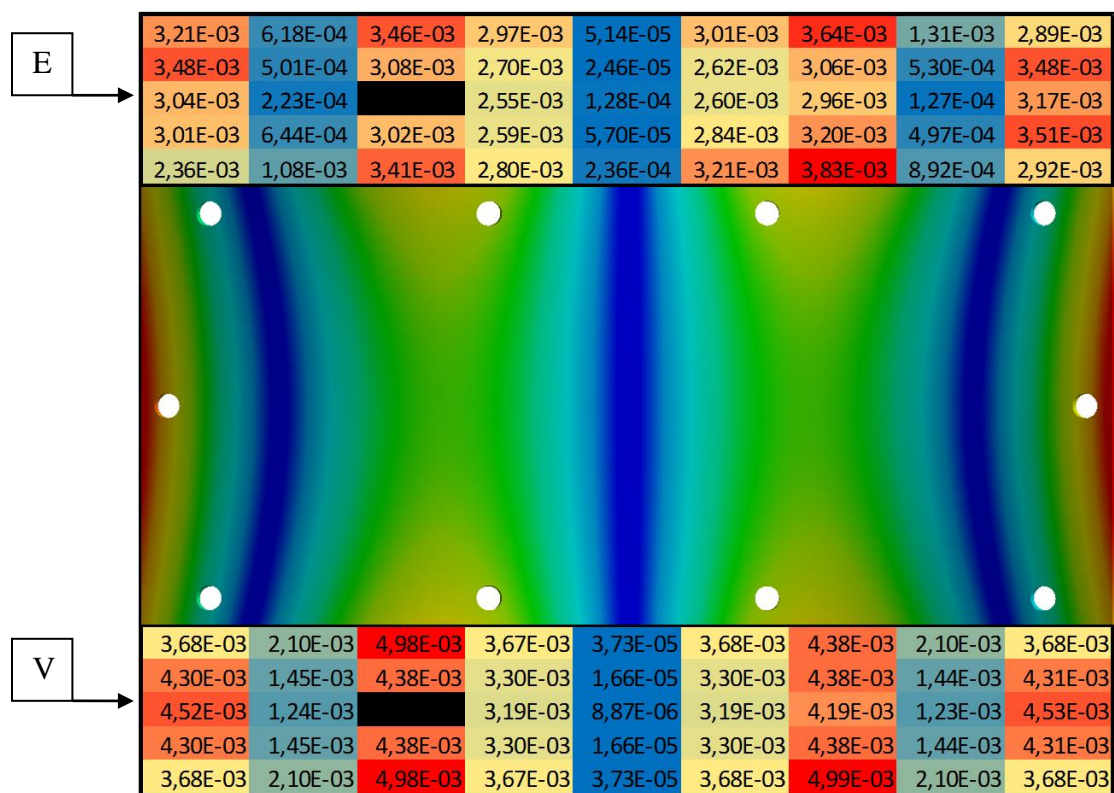
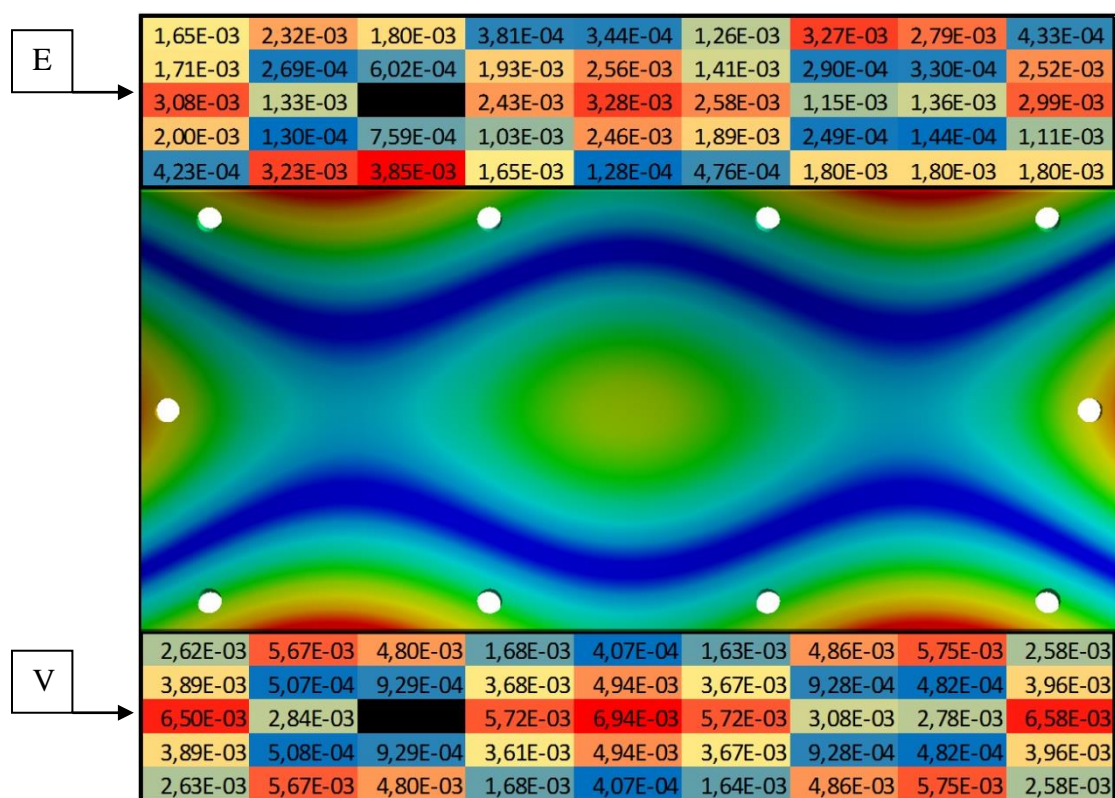
Zo získaných výsledkov experimentálnej a výpočtovej harmonickej analýzy boli primárne porovnávané amplitúdy normálových rýchlostí v 44 meraných bodoch. Konkrétne bola porovnávaná normálová rýchlosť kolmá na plochu meranej štruktúry. Na Obr. 41 až Obr. 45 sú porovnané výsledné amplitúdy normálových rýchlostí z experimentu (označenie E) a výpočtovej simulácie (označenie V). Na spracovanie hodnôt bola využitá funkcia podmieneného formátovania z programu MICROSOFT EXCEL. V programe bolo nastavené trojfarebné rozlíšenie nárastu amplitúd s miestom uloženia snímača sily:

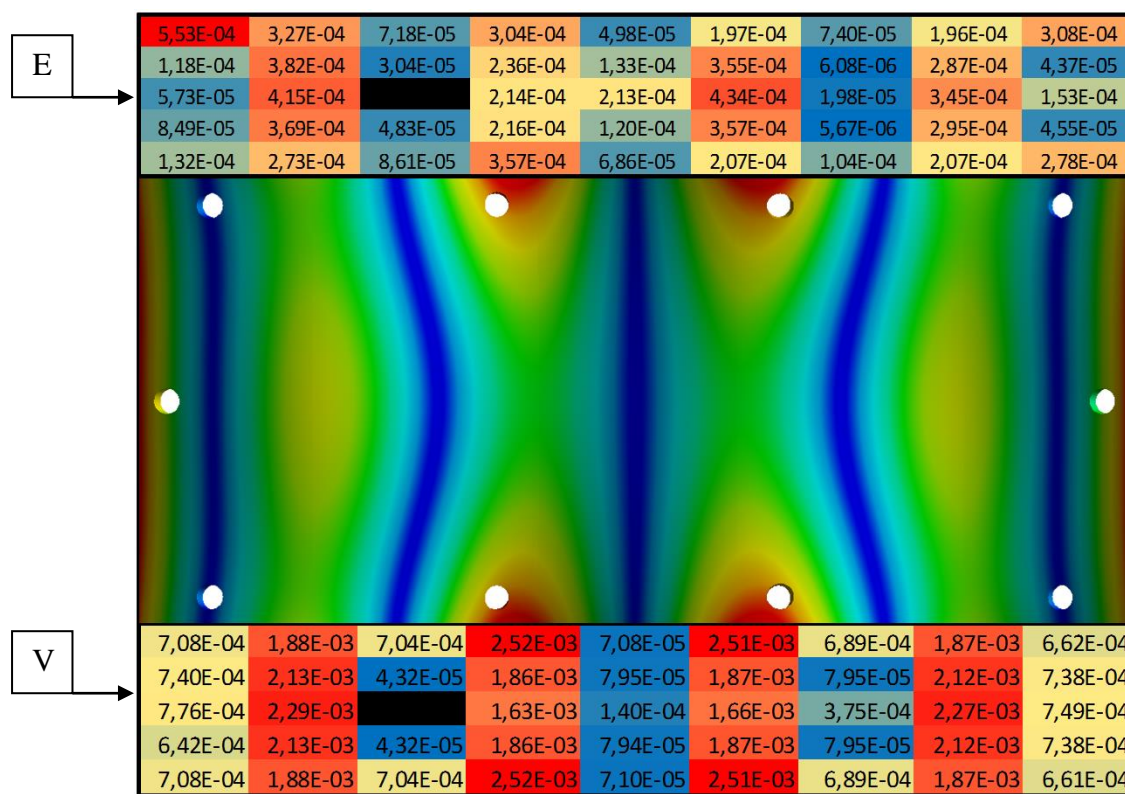
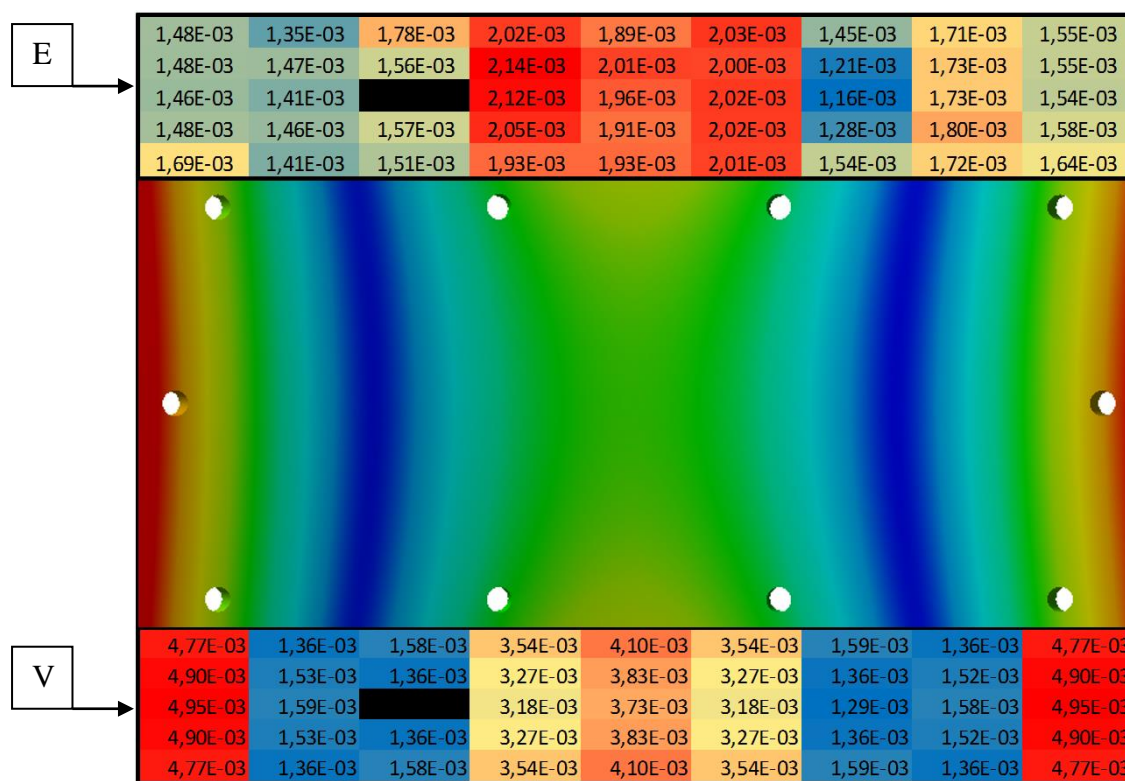
- Červená farba – maximálne nárasty amplitúdy normálovej rýchlosti
- Modrá farba – minimálne nárasty amplitúdy normálovej rýchlosti
- Žltá farba - zobrazuje stredné nárasty amplitúdy normálovej rýchlosti
- Čierna farba – uloženie snímača sily, bod, v ktorom bola štruktúra budená



Obr. 41 Porovnanie amplitúd normálovej rýchlosti [ $\text{m.s}^{-1}$ ] 1. módu vika hrúbky 3 mm



Obr. 42 Porovnanie amplitúd normálovej rýchlosti [ $\text{m.s}^{-1}$ ] 3. módu vika hrúbky 3 mmObr. 43 Porovnanie amplitúd normálovej rýchlosti [ $\text{m.s}^{-1}$ ] 5. módu vika hrúbky 3 mm

Obr. 44 Porovnanie amplitúd normálovej rýchlosti [ $m.s^{-1}$ ] 11. módu vika hrúbky 3 mmObr. 45 Porovnanie amplitúd normálovej rýchlosti [ $m.s^{-1}$ ] 1. módu vika hrúbky 12 mm

Z hľadiska vykreslenia kritických miest (maximálne amplitúdy) na meranej štruktúre boli výsledky v jednotlivých modeloch do vysokej miery porovnateľné s vlastnými tvarmi získanými modálnou analýzou. Tým je myslená zhoda farebného rozlíšenia podmieneného formátovania s farebným vykreslením vlastného tvaru z modálnej analýzy. Pri vzájomnom porovnávaní samotných hodnôt normálových rýchlostí z experimentu a výpočtovej simulácie je možné skonštatovať, že na Obr. 41, Obr. 42 a Obr. 43 boli docielené relatívne blízke zhody. Na Obr. 44 sú znateľné odchýlky medzi experimentom a výpočtovou simuláciou. Tie s veľkou pravdepodobnosťou boli spôsobené práve vzájomným rozdielom vlastných frekvencií získaných z experimentu a simulácie. V Obr. 45 je vidieť výrazný rozdiel medzi nárastom maximálnych amplitúd. V experimente boli zaznamenané maximálne amplitúdy v strednej časti súčasti, no výpočtovou simuláciou nastali lokálne maximá amplitúd na okrajoch víka. Tento rozdiel mohol byť spôsobený samotným lankovým uchytením. Vplyvom hmotnosti hrubšej štruktúry mohlo dôjsť k tomu, že práve cez lankové zavesenie bolo vnesené prídavné zaťaženie do celého merania.

Pri pohľade na číselné vyhodnotenie amplitúd normálovej rýchlosti je vcelku zložité vyhlásiť či sa jedná o kritické miesta, a či je vôbec potrebné sa nimi zaoberať. Práve z tohto dôvodu, že boli simulované len voľné uloženia dosiek, kde nedochádzalo k žiadnemu kontaktu, interakcii s inými objektmi, je zložité zaujať v tomto bode určité stanovisko. Značne jednoduchšie by bolo možné vyhodnocovať vybudené amplitúdy z pohľadu kritických miest na štruktúre, keby oba skúmané víka boli súčasťami určitého funkčného celku (prevodoviek, karosérií a pod.) v reálnych pracovných podmienkach.

## ZÁVER

Na začiatku diplomovej práce sú objasnené teoretické poznatky vibrácií rovinných dosiek. Táto kapitola v sebe zahŕňa základné predpoklady, vlastnosti rovinných dosiek a pohybové rovnice popisujúce ich kmitavý pohyb. Ďalej je v tejto časti zahrnuté rozdelenie rovinných dosiek z pohľadu geometrie, materiálových vlastností, silového zaťažovania. Na základe rôznych faktorov ovplyvňujúcich kmitanie rovinných dosiek je vysvetlených niekoľko špecifických príkladov. Tieto diferencie sú v obsahu vysvetlené buďto prostredníctvom fyzikálnych parametrov vstupujúcich do výpočtových vzťahov alebo vzájomným porovnaním v konkrétnych grafických závislostiach.

Z hľadiska zvolenia korektného prístupu v praktickej časti práce bolo najskôr potrebné vypracovanie rešerše v oblasti modálnej analýzy. V kapitole sú vecne zahrnuté vysvetlenia troch možných prístupov uplatňujúcich sa pri riešení modálnej analýzy. Primárne je v tejto kapitole vysvetlená realizácia experimentálnej modálnej analýzy. Je popísaný akýsi chronologický postup laboratórneho merania, v ktorom je zahrnutá príprava meranej štruktúry, nastavenie meracieho aparátu až po vyhodnocovanie nameraných dát. Sú tu podrobne popísané 2 typy budenia štruktúry, ktorých využitie bolo následne uplatnené v technickom experimente praktickej časti tejto práce.

Praktická časť práce bola rozdelená do dvoch hlavných oblastí. Prvou bola modálna analýza a druhou oblasťou bola harmonická analýza.

V modálnej analýze sa postupovalo tromi spôsobmi riešenia. Prvým bolo analytické stanovenie vlastných frekvencií vybraného víka, pričom boli brané do úvahy dve varianty hrúbky dosky (3 mm a 12 mm). Boli stanovené vlastné frekvencie s uvažovaním voľnej a votknutej dosky. Takto získané analytické výsledky boli porovnávané s výsledkami s numerickej výpočtovej simulácie. Podstatnú časť modálnej analýzy tvorili najmä výpočtová simulácia a experiment. Týmito metódami boli vyhodnocované vlastné módy víka s hrúbkou 3 mm a 12 mm, pričom bol vyšetrovaný voľný spôsob uloženia dosiek. Výsledky vlastných tvarov a frekvencií z experimentu a výpočtovej simulácie boli následne vzájomne validované. Experimentálnou modálnou analýzou oboch variant meraných vík boli získavané hodnoty pomerného tlmenia, ktoré neskôr boli použité v harmonickej analýze.

Na základe získaných modálnych vlastností bola ďalej uskutočnená harmonická analýza meraných štruktúr. Obe varianty dosky boli prostredníctvom modálneho budiča vibrácií budené harmonickými signálmi. Vhodne nastaveným experimentom boli zaznamenávané hodnoty signálu odozvy a budenia vo vybraných bodoch skúmanej štruktúry. Vďaka získaným hodnotám pomerného tlmenia s modálnej analýzy a zaznamenaným signálom budenia (silové zaťaženie) z experimentu harmonickej analýzy, bolo možné zostaviť výpočtový model, korešpondujúci s vykonaným laboratórnym meraním.

Z experimentálne nameraných dát boli vykreslené amplitúdo-frekvenčné charakteristiky vyšetrovaných vlastných módov vo frekvenčnom rozsahu 0 – 1200 Hz. V týchto závislostiach boli prioritne vyšetrované maximálne nárasty amplitúd normálovej rýchlosti.

Vykonaným experimentom a výpočtovou simuláciou harmonickej analýzy boli vzájomne porovnávané maximálne amplitúdy normálovej rýchlosti na povrchu súčastí. Nárasty maximálnych amplitúd zo 44 bodov boli v závere práce vykreslené v tzv. dátových modeloch, kde prostredníctvom podmieneného formátovania boli farebne rozlíšené vyšetrované vlastné

tvary buđených súčastí. V hodnotách normálových rýchlostí získaných experimentom a výpočtovou simuláciou nastali určité rozdiely. Je potrebné skonštatovať, že výrazný vplyv v týchto rozdieloch zohralo úlohu najmä zadávanie tlmenia do výpočtových modelov. Každou nepatrnou zmenou hodnoty tlmenia o 10 % nastávali vo výsledných amplitúdach poznateľné rozdiely. Metodika stanovovania tlmenia štruktúry a jej následného presného využívania vo výpočtových simuláciách v sebe zahŕňa mnohé úskalia. Pri podrobnom zaoberaní sa problematikou tlmenia sa naskytuje možnosť samostatnej akademickej práce, ktorej hodnota by s veľkou pravdepodobnosťou presahovala rámec diplomovej práce. Z tohto dôvodu je potrebné brať na výsledne získané amplitúdy určitú dávku rezervy.



## POUŽITÉ INFORMAČNÉ ZDROJE

- [1] LEISSA, Arthur W. *Vibration of plates* [online]. Washington, D. C.: NASA, 1969 [cit. 2017-01-27]. ISBN 9781563962943. Dostupné z: <<https://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/19700009156.pdf>>
- [2] LAMB, Horace. *On the Vibrations of an Elastic Plate in Contact with Water* [online]. London: Royal Society of London, 1920 [cit. 2017-01-27]. Series A. Dostupné z: <<http://rspa.royalsocietypublishing.org/content/98/690/205>>
- [3] LINDHOLM, U.S., D.D. KANA, W. CHU a H.N. ABRAMSON. Elastic Vibration Characteristics of Cantilever Plates in Water. *JOURNAL OF SHIP RESEARCH*. 1965, (1), 11-36. Dostupné tiež z: <<http://www.sname.org/HigherLogic/System/DownloadDocumentFile.ashx?DocumentFileKey=a4e1a428-4016-4146-b0d0-38ea1a1f38cb>>
- [4] WAH, T. Vibration of Circular Plates at Large Amplitudes. *J. Eng. Mech. Div. Proc. Am.Soc. civil Eng.*, 1963, (EM 5), 1-15.
- [5] BLEVINS, Robert D. *Formulas for Natural Frequency and Mode Shape*. Ilustrované, dotlač, reedícia. USA: Krieger Publishing Company, 2001. ISBN 9781575241845.
- [6] TIMOSHENKO, Prof. S.P. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. *Philosophical Magazine: Series 6*. 1921, s.744. Dostupné tiež z: <<http://tera-3.ul.cs.cmu.edu/NASD/01cf394d-c0ee-4090-918f-a8413fe96bee/China/disk6/74/101-200/31007472/PDF/000000318.pdf>>
- [7] DERESIEWICZ, H. Symmetric Flexural Vibrations of a Clamped Disk. *Journal of Applied Mechanics*. 1956, (2), s319
- [8] TOMAR, J.S. *On Flexural Vibrations of Isotropic Elastic Thin Circular Plates According to Mindlin's Theory* [online]. 1962, (5), s552-560 [cit. 2017-02-09]. Dostupné z: <[http://insa.nic.in/writereaddata/UploadedFiles/PINSA/Vol29A\\_1963\\_5\\_Art05.pdf](http://insa.nic.in/writereaddata/UploadedFiles/PINSA/Vol29A_1963_5_Art05.pdf)>
- [9] BOLOTIN, V.V. Vibration of Layered Elastic Plates. *Proceedings of Vibration Problems*. 1963, 4(4), s. 331-346.
- [10] *Evo: SCOTT FLY'AIR SKIS 2014* [online]. [cit. 2017-02-13]. Dostupné z: <<http://www.evo.com/outlet/skis/scott-flyair-2014.aspx>>
- [11] *Fundamental frequency of isotropic and orthotropic rectangular plates with linearly varying thickness by discrete singular convolution method* [online]. Antalya, Turkey: Akdeniz University, Faculty of Engineering, Civil Engineering Department, Division of Mechanics [cit. 2017-03-13]. Dostupné z: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0307904X0800348X>>
- [12] FRANKOVSKÝ, Peter. *VYUŽITIE MODÁLNEJ ANALÝZY PRI DIAGNOSTIKE VIBRÁCIÍ STROJNÝCH ZARIADENÍ* [online]. Technická univerzita v Košiciach, Strojnícka fakulta, 2011 [cit. 2017-04-03]. Dostupné z: <<https://www.sjf.tuke.sk/transferinovacii/pages/archiv/transfer/19-2011/pdf/178-184.pdf>>

- [13] BILOŠOVÁ, Alena. *APLIKOVANÝ MECHANIK JAKO SOUČÁST TÝMU KONSTRUKTÉRŮ A VÝVOJÁŘŮ: ČÁST MODÁLNÍ ZKOUŠKY* [online]. 1. Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava, Fakulta strojní, 2012 [cit. 2017-04-03]. Dostupné z: <<http://projekty.fs.vsb.cz/147/ucebniopory/978-80-248-2758-2.pdf>>
- [14] PROKOP, A. *Modelovani vibraci pohonných jednotek aplikaci virtualních prototypů*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2016. 160 s. Vedúci dizertačnej práce doc. Ing. Pavel Novotný, Ph.D.
- [15] EWINS, D.J. *Modal testing: Theory and Practice*. Letchworth, England: Research Studies Press, 1984. ISBN 0 86380 036 X.
- [16] DE SILVA, Clearence *Vibration: Fundamentals and Practice*. 1st. Boca Raton: CRC Press LLC, 1999, ISBN 0-8493-1808-4.
- [17] GADE, Svend, Henrik HERLUFSEN a Hans KONSTANTIN-HANSEN. *APPLICATION NOTE: How to determine the Modal Parameters of Simple Structures*. Bruel&Kjaer, Denmark.
- [18] NOVOTNÝ, Pavel. *Základy problematiky vibrací*. Brno, Česká republika, 2016. Prednáška. Vysoké učení technické v Brně.
- [19] NOVOTNÝ, Pavel. *Aplikace numerických metod v dynamice*. Brno, Česká republika, 2016. Prednáška. Vysoké učení technické v Brně.
- [20] Physics.tutorvista. *Amplitude of a Wave* [online]. [cit. 2017-05-20]. Dostupné z: <<http://physics.tutorvista.com/waves/amplitude-of-a-wave.html>>

## ZOZNAM POUŽITÝCH SKRATIEK A SYMBOLOV

$a$	[m]	Dĺžka obdĺžnikovej dosky
$a_k/h_k$	[ - ]	Pomer rádiusu a hrúbky kruhovej dosky
$a_v$	[m]	Dĺžka horného víka
$b$	[m]	Šírka obdĺžnikovej dosky
$b_v$	[m]	Šírka horného víka
$C$	[ - ]	Z angl. slova clamped – votknutý/ upnutý
$CAD$	[ - ]	Z angl. výrazu Computer aided design – počítačové projektovanie
$D$	[ - ]	Ohybová tuhosť
$E$	[Pa]	Youngov modul pružnosti v ťahu
$E_f$	[Pa.m <sup>-1</sup> ]	Modul pružinového podkladu
$E_v$	[Pa]	Youngov modul pružnosti v ťahu horného víka
$F$	[ - ]	Z angl. slova free - voľný
$\mathbf{F}$	[N]	Vektor zaťaženia
$f_{1i}$	[Hz]	Vlastná frekvencia i-teho módu pre víko hrúbky 3 mm
$f_{2i}$	[Hz]	Vlastná frekvencia i-teho módu pre víko hrúbky 12 mm
$F_{ef}$	[N]	Efektívna hodnota sily
$F_{ef1i}$	[N]	Efektívna hodnota sily i-teho módu pre víko hrúbky 3 mm
$F_{ef2i}$	[N]	Efektívna hodnota sily i-teho módu pre víko hrúbky 12 mm
$FEM$	[ - ]	Z angl. jazyka finite element method
$f_i$	[Hz]	Vlastná frekvencia i-teho módu
$F_k$	[N]	Harmonická budiaca sila
$F_{max}$	[N]	Maximálna hodnota sily
$F_{max1i}$	[N]	Maximálna hodnota sily i-teho módu pre víko hrúbky 3 mm
$F_{max2i}$	[N]	Maximálna hodnota sily i-teho módu pre víko hrúbky 12 mm
$FRA$	[ - ]	Frekvenčný analyzátor odozvy
$G$	[Pa]	Modul pružnosti v šmyku
$h$	[m]	Hrúbka dosky
$h_{v1}$	[m]	Hrúbka horného víka (variant 1 – 3mm)
$h_{v2}$	[m]	Hrúbka horného víka (variant – 12mm)
$h_y$	[m]	Hrúbka dosky pozdĺž osi y
$K$	[N.m <sup>-1</sup> ]	Tuhosť
$k_s$	[N.m <sup>-1</sup> ]	Tuhosť sústavy



$\mathbf{K}_s$	[N.m <sup>-1</sup> ]	Symetrická matica tuhosti sústavy
$m$	[ - ]	Číslo uzlovej čiary v smere osi x
MKP	[ - ] $\nu$	Metóda konečných prvkov
$m_s$	[kg]	Hmotnosť sústavy
$\mathbf{M}_s$	[kg]	Symetrická matica hmotnosti sústavy
$n$	[ - ]	Číslo uzlovej čiary v smere osi y
$N$	[ - ]	Počet módov
$\mathbf{q}$	[m]	Vektor polohy
$\dot{\mathbf{q}}$	[m.s <sup>-1</sup> ]	Vektor rýchlosti
$\ddot{\mathbf{q}}$	[m.s <sup>-2</sup> ]	Vektor zrýchlenia
$R_c$	[m]	Polomer centrálnej diery
RMS	[ - ]	Root mean square – efektívna hodnota
SS	[ - ]	Z angl. výrazu simply supported – jednoducho podopretý
$t$	[s]	čas
$w$	[m]	Priečna výchylka
$W$	[ - ]	Funkcia polohy súradníc
$x$	[m]	Vzdialenosť bodu v smere osi x
$x_j$	[ - ]	Miesto pôsobenia budiacej sily
$x_p$	[m]	Vzdialenosť medzi pružinami
$y$	[mm]	Vzdialenosť bodu v smere osi y
$\alpha_{jk}$	[ - ]	Prvok matice frekvenčných odozgových funkcií
$\alpha_z$	[ ° ]	Uhol zúženia dosky
$\gamma$	[kg.m <sup>-2</sup> ]	Pomer hmotnosti na jednotku plochy dosky
$\gamma_v$	[kg.m <sup>-2</sup> ]	Pomer hmotnosti na jednotku plochy horného víka
$\Delta^2$	[ - ]	Laplaceov operátor
$\Delta f_i$	[Hz]	Frekvenčná šírka pásma pre i-ty mód
$\lambda_{ij}$	[ - ]	Bezrozmerná experimentálne určená frekvenčná konštanta
$\lambda_r$	[ - ]	Vlastné číslo r-tého módu
$\nu$	[ - ]	Poissonova konštanta
$\nu_{pv}$	[ - ]	Poissonova materiálová konštanta horného víka
$\xi_{1i}$	[ % ]	Hodnota pomerného tlmenia i-teho módu pre víko hrúbky 3 mm
$\xi_{2i}$	[ % ]	Hodnota pomerného tlmenia i-teho módu pre víko hrúbky 12 mm
$\xi_i$	[ % ]	Hodnota pomerného tlmenia pre i-ty mód

$\alpha_v$	[ - ]	Pomer dĺžky a šírky horného víka
$\alpha_{v1}$	[ - ]	Pomer dlhšej a kratšej hrany víka hrúbky 3 mm
$\alpha_{v2}$	[ - ]	Pomer dlhšej a kratšej hrany víka hrúbky 12 mm
$\pi$	[ - ]	Ludolfovo číslo
$\rho$	[kg.m <sup>-3</sup> ]	Hustota materiálu dosky
$\rho_p$	[kg.m <sup>-3</sup> .m <sup>-2</sup> ]	Hustota na jednotku plochy
$\rho_v$	[kg.m <sup>-3</sup> ]	Hustota materiálu horného víka
$\rho_w/\rho$	[ - ]	Pomer hustoty vody ku hustote materiálu skúmanej dosky
$\sigma_x$	[MPa]	Normálové napätie v ose x
$\sigma_y$	[Mpa]	Normálové napätie v ose y
$\tau_{xy}$	[MPa]	Tangenciálne (šmykové) napätie v rovine xy
$\tau_{yz}$	[MPa]	Tangenciálne (šmykové) napätie v rovine yz
$\tau_{zx}$	[MPa]	Tangenciálne (šmykové) napätie v rovine zx
$\psi_o$	[ ° ]	Uhol spôsobený deformáciou pri ohybe
$\omega$	[rad.s <sup>-1</sup> ]	Uhlová frekvencia
$\Omega$	[rad.s <sup>-1</sup> ]	Vlastná (uhlová) frekvencia sústavy
$\omega_s$	[rad.s <sup>-1</sup> ]	Uhlová frekvencia zahrňujúca šmykové deformácie
$\Phi_j^r$	[ - ]	J-ty prvok r-tého vektoru vlastných tvarov